

TD B5. Convexité

Exercice B5.1

1. Déterminer la convexité des fonctions suivantes :

- | | |
|--------------|---|
| (a) $\sin$, | (d) $\exp$ |
| (b) $\ln$, | (e) $x \mapsto x^p$ avec $p > 1$ entier, |
| (c) $\tan$, | (f) $x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, |

2. Dédurre de résultats ci-dessus les inégalités suivantes.

- (a) $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$,
- (b) $\forall x \in [0, 1], x+1 \leq e^x \leq 1+x(e-1)$,
- (c) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$,
- (d) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall p \geq 2, (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$,
- (e) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$,
- (f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}_+, \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.

Exercice B5.2

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $2^x + 2^{x^3} \geq 2^{x^2+1}$.

Exercice B5.3

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \, dx \geq 0.$$

Exercice B5.4

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice B5.5

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \max\{|f''(x)|, x \in [a, b]\}$.
2. Soit $g : x \mapsto f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$. Montrer que g est convexe et h concave.
3. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

**Exercice B5.6**

Soit f une fonction convexe et g une fonction croissante et convexe. Montrer que $g \circ f$ est convexe

- si l'on suppose f et g de classe $\mathcal{C}^2$,
- sans hypothèses de régularité.

Exercice B5.7

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall a, b \in [0, 1], f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.