Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et on définit

$$\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, \exists p \in \mathbb{N},\, M^p = 0_n\}.$$

Autrement dit $\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n telles qu'une de leurs puissances est la matrice nulle. On dit qu'elles sont **nilpotentes**.
On notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de taille n.

1. $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2}$ (on vérifie que son carré est nul).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A^3 = 0_3$, donc $\boxed{A \in \mathcal{N}_3}$.
3. Soit $A \in \mathcal{N}_n$, on dispose donc de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.
   Alors $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p = 0_n$ donc $\boxed{\lambda A \in \mathcal{N}_n}$.
4. La question de la somme.
   (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$ telles que $AB = BA$.
   On dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$ et de $q \in \mathbb{N}$ tel que $B^q = 0_n$.
   Soit $m = \max(p, q)$. Alors d'après la formule du binôme de Newton (car $AB = BA$) :
   $$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$
   Or la définition de m est telle que pour $0 \leqslant k \leqslant m$, soit $k \geqslant p$, soit $m-k \geqslant q$. Ainsi, soit $A^k = 0_n$, soit $B^{m-k} = 0_n$. Finalement $(A+B)^m = 0_n$, donc $\boxed{A + B \in \mathcal{N}_n}$.
   (b) Contre-exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que $A, B \in \mathcal{N}_2$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}_2$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^p = AB$).
5. La question du produit.
   (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$. Supposons $AB \in \mathcal{N}_n$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^p = 0_n$.
   Alors $(BA)^{p+1} = B(AB)^p A = B0_nA = 0_n$. Donc $\boxed{BA \in \mathcal{N}_n}$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dispos de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.
   Si $AC = CA$, alors $(AC)^p = A^p C^p = 0_n$ donc $\boxed{AC \in \mathcal{N}_n}$.
   (c) Voir question 4b.
6. Questions d'inversibilité : soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.
   (a) Si A était inversible, on aurait $0_n = (A^{-1})^p A^p = I_n$, ce qui est absurde.
   Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

(b) On développe : $(I_n - A)\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i\right) = \sum_{i=0}^{p-1} A^i - \sum_{i=0}^{p-1} A^{i+1} = I_n - A^p$ par télescopage.

Donc $(I_n - A)\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i\right) = I_n$.

De même $\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i\right)(I_n - A) = I_n$ donc $\boxed{I_n - A \text{ est inversible } (I_n - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} A^i}$.

(c) Comme $-A \in \mathcal{N}_n$, le résultat précédent montre que $\boxed{I_n + A \text{ est inversible}}$. Et $(I_n + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i A^i$.

7. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[J]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On montre par récurrence (sur k) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[J^k]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A]_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j$, 1 sinon [1].

On montre que $A = \sum_{i=1}^{n-1} J^k$.

On a vu dans la question précédente que $J^n = 0_n$, donc $J \in \mathcal{N}_n$, de même que ses puissances d'après 5b. De plus les puissances de J commutent ($J^k J^{k'} = J^{k'} J^k = J^{k+k'}$). Finalement d'après 4a (généralisée par récurrence si on veut), $\boxed{A \in \mathcal{N}}$.

1. La question initialement posée était plus compliquée et nécessiterait de montrer, comme on a fait pour J, que les diagonales de 0 progressent à chaque puissance.