

Programme de colle 18 : du 09/02 au 13/02

Calcul matriciel

- Matrices, opérations matricielles : somme, multiplication externe, produit : anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Matrices particulières (lignes/colonnes, matrice nulle, identité, matrices élémentaires, diagonales, triangulaires supérieures/inférieures).
- Stabilités (par produit) des ensembles de matrices diagonales/triangulaires.
- Calculs de puissances, formules dans le cas de matrices qui commutent.
- Transposée, propriétés, matrices symétriques, antisymétriques.
- Trace, linéarité, trace d'un produit de matrices.
- Matrices inversibles : définition, groupe des inversibles, inverse d'une matrice triangulaire, diagonale, transposée.
- Caractérisations par le rang, les solutions d'un système (homogène ou non).
- Matrices d'opérations élémentaires, algorithme de Gauß-Jordan.
- Rang (nombre de pivots), matrices équivalentes, caractérisation par équivalence à J_r .

Exercices abordés dans le TD D2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 16.

Polynômes

- Définition, opérations (dont la formule du produit de Cauchy), structure d'anneau intègre, éléments inversibles.
- Degré et coefficient dominant d'un polynôme, d'un produit, d'une somme, d'une composée.
- Fonction polynomiale, évaluation (morphisme d'évaluation).
- Polynômes dérivés, degré, formule de Leibniz, formule de Taylor.
- Arithmétique des polynômes (divisibilité, division euclidienne, PGCD, PPCM, Bézout, Gauß).
- Racines : caractérisations par l'évaluation et la divisibilité.

Exercices abordés dans le TD C4 : 1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17.

Questions de cours

- Associativité du produit matriciel.
- Les matrices triangulaires supérieures (ou supérieures strictes) sont stables par produit.
- Toute matrice se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- Reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ ou par $(X - a)^2$.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha) | P$.

Remarques

- Les objectifs du calcul matriciel ont été annoncés ; calculs de puissances, stabilités, polynômes annulateurs, diagonalisation (ces derniers sans les nommer) : les méthodes ne doivent pas surprendre.
- Cette semaine : pas de racines multiples ou de factorisation.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.