

CHAPITRE D3

ESPACES VECTORIELS

Objectifs

- Notions d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel (sev).
- Éléments constitutifs d'un sev (vecteurs, famille génératrice).
- Relations entre sev (inclusion, supplémentarité).
- Notion d'application linéaire.
- Éléments caractéristiques d'un morphisme (noyau, image).
- Applications linéaires particulières.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et premières propriétés

Définition D3.1

Soit E un ensemble. Une **loi de composition externe** de $\mathbb{K}$ sur E est une application « $\cdot$ »

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$


Définition D3.2 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E notée $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (ou un **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel**) lorsque

- (i) $(E, +)$ est un **groupe commutatif**, c'est-à-dire :
 - (N) $\triangleright$ la loi $+$ admet un **élément neutre** dans E , noté 0_E ,
 - (A) $\triangleright$ la loi $+$ est **associative**,
 - (S) $\triangleright$ tout $u \in E$ admet un **symétrique** par $+$, noté $-u$,
 - (C) $\triangleright$ la loi $+$ est **commutative**.
- (ii) la loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
 - (A') $\triangleright \forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$,
 - (N') $\triangleright \forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$,
 - (D1) $\triangleright \forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
 - (D2) $\triangleright \forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

Définition D3.3

Étant donné un $\mathbb{K}$ -espace-vectoriel E , les éléments de E sont appelés des **vecteurs** de E ; l'élément 0_E est appelé **vecteur nul**. $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** de E et ses éléments sont appelés des **scalaires**.

Notation. Pour tous $u, v \in E$, on note $u - v = u + (-v)$.

Proposition D3.4

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- (i) $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$,
- (ii) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$,
- (iii) $-u = (-1) \cdot u$.

Dém. D3.4

(i) $0_{\mathbb{K}} \cdot u$	$=$	$0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_E$	(N)	(ii) $\lambda \cdot 0_E$	$=$	$\lambda \cdot (0_E + 0_E)$	(N)
		$= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + (u + (-u))$	(S)			$= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$	(D1)
		$= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + u) + (-u)$	(A)			donc (en ajoutant des deux côtés le sy-	
		$= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + 1 \cdot u) + (-u)$	(N')			métrique de $\lambda \cdot 0_E$) : $0_E = \lambda \cdot 0_E$.	
		$= (0_{\mathbb{K}} + 1) \cdot u + (-u)$	(D2)	(iii)	$u + (-1) \cdot u$	$= 1 \cdot u + (-1) \cdot u$	(N')
		$= 1 \cdot u + (-u)$				$= (1 + (-1)) \cdot u$	(D2)
		$= u + (-u)$	(N')			$= 0_{\mathbb{K}} \cdot u$	
		$= 0_E$	(S)			$= 0_E$	(i)

Donc le symétrique de u est bien $(-1) \cdot u$.

Proposition D3.5

Soit $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

- | | |
|--|---|
| (i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$; | (iv) $\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E)$; |
| (ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$; | (v) Si $u \neq 0_E$, alors $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda = \mu$; |
| (iii) $-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u)$; | (vi) Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow u = v$. |

Dém. D3.5

- (i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot (u + (-1) \cdot v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot (-1) \cdot v = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$;
- (ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = (\lambda + (-\mu)) \cdot u = \lambda \cdot u + (-\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$;
- (iii) $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u$ et $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot ((-1) \cdot u) = \lambda \cdot (-u)$;
- (iv) • La prop D3.4 donne le sens $\boxed{\Leftarrow}$
- Réciproquement, supposons $\lambda \cdot u = 0_E$. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $u = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$.
- (v) $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \mu \cdot u = 0_E \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \lambda = \mu$ si $u \neq 0_E$.
- (vi) $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \lambda \cdot v = 0_E \Leftrightarrow \lambda \cdot (u - v) = 0_E \Leftrightarrow u - v = 0_E \Leftrightarrow u = v$ si $\lambda \neq 0_E$.

1.2 Exemples fondamentaux**Produit d'espaces vectoriels****Définition et proposition D3.6**

Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors on peut définir sur $E_1 \times E_2$ la loi de composition interne

$$\begin{aligned} + : (E_1 \times E_2)^2 &\rightarrow E_1 \times E_2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{aligned}$$

et la loi de composition externe

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) &\rightarrow E_1 \times E_2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) &\mapsto (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \end{aligned}$$

qui en font un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel : l'**espace vectoriel produit** de E_1 et E_2 .

Remarque. Ceci permet de définir le plan $\mathbb{R}^2$ ainsi que tous les espaces $\mathbb{K}^n$.



Espaces de polynômes

Proposition D3.7

La loi externe

$$\begin{aligned} \cdot & : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto \lambda \cdot P \end{aligned}$$

fait de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Espaces de fonctions

Définition et proposition D3.8

Étant donné un ensemble X et un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $X \rightarrow E$. On peut définir la **somme** de fonctions et la **multiplication par un scalaire** : étant donné $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f + g & : X \rightarrow E & \text{et} & \quad \lambda \cdot f : X \rightarrow E \\ x & \rightarrow f(x) + g(x) & & \quad x \rightarrow \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

qui font de $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarques. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la matrice nulle). $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la suite nulle).

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition D3.9

- (i) Soit $(u_i)_{i=1 \dots n}$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1 \dots n$.

- (ii) Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E . On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot u_i,$$

où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est une famille presque nulle (autrement dit : à support fini) de scalaires.

Remarque. Un objectif est souvent de savoir exprimer n'importe quel vecteur comme combinaison linéaire de certains vecteurs de base, les λ_i jouant alors le rôle de coordonnées ; nous y reviendrons.

Définition D3.10

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble de E . On dit que F est un sous- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de E lorsque

- (i) F est non-vide,
- (ii) F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire
 - $\forall u, v \in F, u + v \in F,$
 - $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u \in F$

Remarques.

- En pratique, pour montrer que F est non vide, on vérifiera le plus souvent que $0_E \in F$.
- Les deux conditions de stabilité reviennent à dire que F est stable par combinaison linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Proposition D3.11

Soit F un sous- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors les restrictions à F des lois $+$ et $\cdot$ font de $(F, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarque. Le plus souvent, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on s'attachera à montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition D3.12 (Intersection de sous-espaces)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- (i) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (ii) Soit I un ensemble quelconque et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition D3.13 (Sous-espace engendré)

Soit E un espace vectoriel et A une partie de E . On appelle **sous-espace vectoriel engendré par A** et on note $\text{Vect } A$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A :

$$\text{Vect } A = \bigcap_{\substack{H \text{ sev de } E \\ A \subset H}} H.$$

**Théorème et définition D3.14**

- (i) Soit E un espace vectoriel et A une partie de E . $\text{Vect } A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A . Autrement dit, $F = \text{Vect } A$ si et seulement si
- F est un sous-espace vectoriel de E ,
 - $A \subset F$,
 - pour tout sous-espace G de E tel que $A \subset G$, on a $F \subset G$.
- (ii) Soit I un ensemble tel que $A = \{u_i \mid i \in I\}$. Alors $\text{Vect } A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A , noté $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$. Dans ce cas, on dit que $(u_i)_{i \in I}$ est une **famille génératrice** de E .

Définition D3.15 (Somme de sous-espaces)

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Alors la **somme de F_1 et F_2** est l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}.$$

Proposition D3.16

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2).$$

A fortiori, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition D3.17 (Générateurs et sommes)

- (i) Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E . Alors $\text{Vect } A + \text{Vect } B = \text{Vect}(A \cup B)$.
- (ii) Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(v_j)_{1 \leq j \leq m}$ deux familles de vecteurs de E .
On note $(w_k)_{1 \leq k \leq m+n} = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$. Alors

$$\text{Vect}((u_i)_{1 \leq i \leq n}) + \text{Vect}((v_j)_{1 \leq j \leq m}) = \text{Vect}((w_k)_{1 \leq k \leq m+n}).$$

Définition D3.18

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **en somme directe** lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

- (i) La décomposition de tout élément de $F_1 + F_2$ comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 est unique.
- (ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Théorème et définition D3.19

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **supplémentaires dans E** lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

- (i) $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$.
- (ii) $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

On note $E = F_1 \oplus F_2$.

2 Applications linéaires

Dans la suite, E et F désignent des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

2.1 Définitions

Définition D3.20

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** (ou **$\mathbb{K}$ -linéaire**) de E dans F si

- (i) $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Remarque. On parle aussi de **morphisme** ou d'**homomorphisme** d'espaces vectoriels.

Proposition D3.21

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

- (i) $f(0_E) = 0_F$,
- (ii) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Définition D3.22

- (i) Une application linéaire $E \rightarrow E$ est appelée **endomorphisme de E** .
- (ii) Une application linéaire $E \rightarrow \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire sur E** .

Notations. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ (on trouve parfois $\text{End}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E .



2.2 Opérations

Proposition D3.23 (Structure)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarque. En particulier, l'application nulle et la combinaison d'applications linéaires sont des applications linéaires.

Proposition D3.24 (Composition)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Proposition D3.25

Soit $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- (i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
- (ii) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,
- (iii) $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f$.

Remarque. Dans le cas où $E = F = G$, ces propriétés font de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ un anneau.

2.3 Bijectivité

Proposition D3.26

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et bijective. Alors la réciproque de f est une application linéaire $f^{-1} : F \rightarrow E$.

Définition D3.27

- (i) On dit que $f : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme de E dans F** si elle est linéaire et bijective. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F .
- (ii) On dit que $f : E \rightarrow E$ est un **automorphisme de E** si elle est linéaire et bijective. On appelle **groupe linéaire** l'ensemble des automorphismes de E , noté $\text{GL}(E)$.

Proposition D3.28

- (i) Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est un isomorphisme.
- (ii) Soit f et g deux automorphismes de E . Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux automorphismes de E .

Remarque. Cette propriété fait de $(\text{GL}(E), \circ)$ un groupe.

2.4 Noyau, image

Définition D3.29 (Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de f** , noté $\text{Ker } f$, l'ensemble

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Proposition D3.30

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème D3.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Définition D3.32 (Image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de f , notée $\text{Im } f$, l'ensemble

$$\text{Im } f = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition D3.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Théorème D3.34

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Proposition D3.35

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $E = \text{Vect}(u_i)_{i \in I}$, alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(u_i))_{i \in I}$.



2.5 Équations linéaires

Définition D3.36

On appelle **équation linéaire** une équation d'inconnue x de la forme

$$f(x) = b \quad (\text{D3.1})$$

avec

- $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
- $b \in F$ appelé **second membre** de l'équation.

Théorème D3.37 (Solutions d'une équation linéaire)

L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de l'équation linéaire (D3.1) est

soit vide,

soit un sous-espace affine de E dont la direction est $\text{Ker } f$, c'est-à-dire : si x_0 est une solution de l'équation (D3.1), alors $\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker } f$.

Remarque. Pour résoudre une équation linéaire comme celle présentée en (D3.1), on se ramène souvent à trouver une solution particulière de cette équation, ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (appelée **équation homogène**) : $f(x) = 0_F$.

Proposition D3.38 (Principe de superposition)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soit $(b_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'éléments de F et $(\lambda_i)_{i=1\dots n}$ des scalaires. On considère l'équation (D3.1) avec $b = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Si pour tout $i = 1 \dots n$, x_i vérifie $f(x_i) = b_i$, alors

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

est une solution de l'équation (D3.1).

3 Projections, symétries

On suppose dans ce chapitre que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E , c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Définition D3.39 (Projection)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **projection sur F parallèlement à G** est l'application

$$\begin{aligned} p &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x_F. \end{aligned}$$

Proposition D3.40

La projection p sur F parallèlement à G est linéaire et

- (i) $\text{Ker } p = G$ et $\text{Im } p = F$.
- (ii) $p|_F = \text{Id}_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$.
- (iii) $p \circ p = p$.

Remarque. Si on appelle q la projection sur G parallèlement à F , alors on a

- (i) $p + q = \text{Id}_E$,
- (ii) $F = \text{Ker } q = \text{Im } p$,
- (iii) $G = \text{Ker } p = \text{Im } q$.

Définition D3.41 (Projecteur)

On appelle **projecteur de E** tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie

$$p \circ p = p.$$

Proposition D3.42

Si p est un projecteur de E , alors c'est une projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Définition D3.43 (Symétrie)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **symétrie d'axe F et de direction G** est l'application

$$\begin{aligned} s &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x_F - x_G. \end{aligned}$$

**Proposition D3.44 (Lien entre projection et symétrie)**

Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie d'axe F et de direction G . Alors

- (i) $s = 2p - \text{Id}_E$,
- (ii) $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$.

Proposition D3.45

La symétrie s d'axe F et de direction G est linéaire et

- (i) $F = \text{Ker}(\text{Id}_E - s)$ et $G = \text{Ker}(\text{Id}_E + s)$.
- (ii) $s|_F = \text{Id}_F$ et $s|_G = -\text{Id}_G$.
- (iii) $s \circ s = \text{Id}_E$.

Proposition D3.46

Si s vérifie $s \circ s = \text{Id}_E$, alors c'est une symétrie d'axe $\text{Ker}(\text{Id}_E - s)$ et de direction $\text{Ker}(\text{Id}_E + s)$.

Remarque. Un endomorphisme s tel que $s \circ s = \text{Id}_E$ s'appelle une **involution**.

Méthodes

- Montrer qu'un ensemble est un sev
 - en vérifiant les stabilités,
 - en exhibant une famille génératrice.
 - en le voyant comme un noyau (ou une image).
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau, l'image d'un morphisme.