

Programme de colle 19 : du 16/02 au 20/02

Polynômes

- Définition, opérations (dont la formule du produit de Cauchy), structure d'anneau intègre, éléments inversibles.
- Degré et coefficient dominant d'un polynôme, d'un produit, d'une somme, d'une composée.
- Fonction polynomiale, évaluation (morphisme d'évaluation).
- Polynômes dérivés, degré, formule de Leibniz, formule de Taylor.
- Arithmétique des polynômes (divisibilité, division euclidienne, PGCD, PPCM, Bézout, Gauß).
- Racines : caractérisations par l'évaluation et la divisibilité.
- Racines multiples : ordre de multiplicité, propriétés, caractérisations par l'évaluation des dérivées successives et la divisibilité.
- Factorisation d'un polynôme de degré n dont on connaît des racines/toutes les racines.
- Formules de Viète (les deux coefficients extrémaux).
- Polynômes scindés, polynômes irréductibles, irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, de $\mathbb{C}[X]$, factorisation en produit d'irréductibles.

Exercices abordés dans le TD C4 : 1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 21, 22, 26.

Convexité

- Définition de la convexité (inégalité). Cas d'égalité. Inégalité de Jensen.
- Caractérisation de la convexité par croissance des pentes.
- Cas dérivable : caractérisation par croissance de f' et position de la courbe par rapport à ses tangentes.
- Cas 2 fois dérivable : caractérisation par le signe de f'' .
- Points d'inflexion, détermination de la nature d'un point critique.

Exercices abordés dans le TD B5 : 1, 4, 5.

Questions de cours

- Formule de Taylor pour les polynômes.
- α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha) \mid P$.
- Définition et caractérisation des racines multiples.
- Si un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé, alors P' est scindé.
- Inégalité de Jensen.
- Polynômes de Lagrange (existence et unicité d'un polynôme interpolateur).
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
- Une fonction convexe sur I est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I .

Remarques

- L'énoncé nous invite à énoncer les résultats d'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ sans s'ap-
pesantir sur ce qui est analogue à $\mathbb{Z}$.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des
notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.