

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans ce problème, on se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
 (b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter $f(X^k)$.
 ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré et le coefficient dominant de $f(P)$ en fonction de ceux de P .
 (c) Déterminer le noyau de l'application f .
 (d) L'application f est-elle surjective ? On ne demande pas de déterminer $\text{Im}(f)$.
2. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **pair** si et seulement si ses coefficients de degré impair sont nuls. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **impair** si et seulement si ses coefficients de degré pair sont nuls. On note $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des polynômes pairs et $\mathcal{I}_X$ l'ensemble des polynômes impairs.

- (a) Montrer que

$$P(-X) = P(X) \iff P \in \mathcal{P}_X.$$

- (b) Montrer que

$$P(-X) = -P(X) \iff P \in \mathcal{I}_X.$$

- (c) Montrer que $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
 (d) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
 (e) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont stables par f .

3. On considère la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathcal{I}_X$, notée g , définie par

$$g : \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{I}_X, \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

- (a) Justifier que g est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{I}_X$.
 (b) Déterminer le noyau de g .
 (c) Montrer que g est surjective.
 (d) Justifier que g est un automorphisme de $\mathcal{I}_X$. Déterminer $g^{-1}(X)$, $g^{-1}(X^3)$ et $g^{-1}(X^5)$.

4. On cherche dans cette question à expliciter l'image de l'application f . On considère une suite de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0).$$

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Justifier que le réel $\varphi(P)$ est bien défini.
- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi(P)$ en fonction des coefficients de P .
- (c) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- (d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - i. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k -ième de $f(P)$ en fonction des dérivées successives de P .
 - ii. En déduire une expression de $\varphi \circ f(P)$.
 - iii. Montrer que

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \iff \forall i \in \mathbb{N}, \varphi \circ f(X^i) = 0.$$
 - iv. Montrer que la condition précédente se traduit par une relation de récurrence portant sur la suite (λ_k) que l'on explicitera.
 - v. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ contient $\text{Im}(f)$ si et seulement si

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{2i+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}.$$

- (e) En déduire que

$$\text{Im}(f) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right. \right\}.$$