Problème 1

L'objet de ce problème est l'étude des polynômes de Tchebychev [1]. On les utilisera en partie C pour évaluer la (très célèbre) valeur, solution du problème connu sous le nom de problème de Bâle (ville de Jacques Bernoulli et d'Euler). Cependant les questions de la partie B sont largement indépendantes des autres parties.

A Une famille de polynômes

1. On a alors $T_2 = 2X^2 - 1$ puis $T_3 = 2X(2X^2-1) - x = \boxed{4X^3 - 3X}$ et $T_4 = 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) = \boxed{8X^4 - 8X^2 + 1}$.
2. (a) Procédons par récurrence double. La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour T_n et T_{n+1}.
   On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Le degré de $2XT_{n+1}$ est $n+2$ et celui de T_n est n. Comme ces deux polynômes sont de degrés différents, leur somme est de $\boxed{\text{degré } n+2}$ et le coefficient dominant est celui de $2XT_{n+1}$.
   De plus si l'on écrit $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R$ par hypothèse de récurrence (avec $\deg R \leqslant n$), alors $2XT_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR$, avec $\deg(2XR) \leqslant n+1$. Donc $\boxed{\text{le coefficient dominant de } T_{n+2} \text{ est } 2^{n+1}}$.

   (b) En évaluant en 0 la relation de récurrence, on a $T_{n+2}(0) = T_n(0)$. Ainsi, pour tout n pair, en posant $n = 2k$, $T_{2k}(0) = (-1)^k T_0(0) = (-1)^k$ et pour tout n impair, $T_n(0) = \pm T_1(0) = 0$.
   Autrement dit, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = (-1)^k \text{ et } a_{2k+1} = 0}$.

   (c) En évaluant en 0 la relation de récurrence, on obtient $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$, avec $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$.
   Puis on montre, soit en étudiant une suite récurrente à 2 termes, soit par récurrence double, que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 1}$.
3. (a) Montrons cette relation par récurrence double.
   Pour $n = 0$ **:** $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0t)$.
   Pour $n = 1$ **:** $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_1(\cos(t)) = \cos(t) = \cos(1t)$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ et $T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$.
   D'après la relation de récurrence, $T_{n+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$.
   Or $2\cos(t)\cos((n+1)t) = \cos((n+2)t) + \cos(nt)$ d'après la question précédente (et en utilisant la parité ou la commutativité du produit).
   D'où la propriété au rang $n+2$.

   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\boxed{T_n(\cos(t)) = \cos(nt)}. \tag{E}$$

   (b) On vient de voir que T_n vérifie cette relation, reste à montrer l'unicité.
   Supposons qu'on ait un polynôme P vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(\cos(t)) = \cos(nt)$.
   Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(\cos(t)) = T_n(\cos(t))$, *i.e.* $(P - T_n)(\cos(t)) = 0$.
   Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(t)$. Donc $(P - T_n)(x) = (P - T_n)(\cos(t)) = 0$.

1. Pafnouti Tchebychev était un mathématicien russe du XIX^e siècle. On lui doit de nombreuses contributions, en théorie des probabilités et en théorie des nombres. Il est notamment l'initiateur de travaux ayant mené, avec Liapounov et Markov puis Kolmogorov, aux probabilités telles qu'on les connaît aujourd'hui

Ainsi tous les réels de $[-1,1]$ sont racines du polynôme $P-T_n$. Donc $P-T_n$ est le polynôme nul et $\boxed{P=T_n}$.

(c) Soit $k,n\in\mathbb{N}$. Même principe : pour tout $x\in[-1,1]$, on écrit $x=\cos(t)$.
$T_n\circ T_k(x)=T_n(\cos(kt))=\cos(nkt)=T_{nk}(x)$.
Les polynômes $T_n\circ T_k$ et T_{nk} coïncident sur $[-1,1]$ donc sont égaux (si on veut refaire le raisonnement : leur différence possède une infinité de racines).
Comme $T_n\circ T_k=T_{nk}=T_{kn}=T_k\circ T_n$, on a bien $\boxed{T_k\circ T_n=T_n\circ T_k=T_{nk}}$.

(d) $T_6=T_2\circ T_3=2(4X^3-3X)^2-1=\boxed{32X^6-48X^4+18X^2-1}$.

4. (a) On applique la relation (E) avec, par exemple, $t=\dfrac{\pi}{2}$. Cela donne $T_n(0)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$. On retrouve $\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_{2k}=(-1)^k \text{ et } a_{2k+1}=0}$.
Avec $t=0$: $b_n=T_n(1)=\cos(n\times 0)=\boxed{1}$.

(b) Soit $x\in[0,1]$. Posons $x=\cos(t)$ avec $t\in[0,\pi/2]$.
Alors $\dfrac{T_n(x)-T_n(1)}{x-1}=\dfrac{T_n(\cos(t))-1}{\cos(t)-1}=\dfrac{\cos(nt)-1}{\cos(t)-1}$. On va utiliser des encadrements déjà étudiés pour les fonctions cos et $g:t\mapsto\cos(nt)$, dérivables en 0. On les montre en étudiant des différences ou à l'aide de formules de Taylor, à revoir après le chapitre concerné.
$-\dfrac{t^2}{2}\leqslant\cos(t)-1\leqslant-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^4}{24}$ et donc $-\dfrac{n^2t^2}{2}\leqslant\cos(nt)-1\leqslant-\dfrac{n^2t^2}{2}+\dfrac{n^4t^4}{24}$.
Ceci montre $\dfrac{\cos(t)-1}{t^2}\xrightarrow[t\to0]{}-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\cos(nt)-1}{t^2}\xrightarrow[t\to0]{}-\dfrac{n^2}{2}$.
Ainsi $\dfrac{\cos(nt)-1}{\cos(t)-1}=\dfrac{\cos(nt)-1}{t^2}\dfrac{t^2}{\cos(t)-1}\xrightarrow[t\to0]{}n^2$.
Par composition de limites, $\dfrac{T_n(x)-1}{x-1}\xrightarrow[x\to1]{}n^2$, donc $\boxed{T_n'(1)=n^2}$.

5. **M1** On procède par récurrence double. Les initialisations sont élémentaires.
Pour $n\in\mathbb{N}$, si l'on suppose la propriété vraie pour T_n et T_{n+1}, alors :
$T_{n+2}(-x)=-2xT_{n+1}(-x)-T_n(-x)=-(-1)^{n+1}2xT_{n+1}(x)-(-1)^nT_n(x)$ par H.R.
Puis $T_{n+2}(-x)=(-1)^{n+2}(2xT_{n+1}(x)-T_n(x))=(-1)^{n+2}T_{n+2}(x)$.
D'où $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)}$.

M2 Soit $x\in[-1,1]$. On écrit $x=\cos(t)$.
$T_n(-x)=T_n(-\cos(t))=T_n(\cos(t+\pi))=\cos(nt+n\pi)$ d'après (E).
Or $\cos(nt+n\pi)=(-1)^n\cos(nt)$, donc $T_n(-x)=(-1)^n\cos(nt)=(-1)^nT_n(x)$.
Ceci montre que les polynômes $T_n(-x)$ et $(-1)^nT_n(x)$ coïncident sur $[-1,1]$, donc ils coïncident sur $\mathbb{R}$ (leur diférence possède une infinité de racines).

Ainsi $\boxed{T_n \text{ est pair pour } n \text{ pair et impair pour } n \text{ impair}}$.

6. Dans cette question, on considère $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, soit $x_k=\cos\left(\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$.
$T_n(x_k)=\cos\left(n\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)=\cos\left((2k-1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\boxed{0}$.

(b) Les x_k pour $k\in[\![1,n]\!]$ sont des valeurs différentes (par monotonie/injectivité de la fonction cos sur $[0,\pi]$. Cela donne donc n racines distinctes de T_n, qui est de degré n. Il n'y en a donc pas d'autres, elles sont toutes simples et comprises (comme valeurs du cos) dans l'intervalle $[-1,1]$.

(c) En n'oubliant pas le coefficient dominant, on obtient $\boxed{T_n = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)}$. Chaque facteur est bien irréductible car de degré 1.

(d) Le coefficient constant de T_n est, en développant, $(-1)^n 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n} x_k$. Par ailleurs, on l'obtient comme $T_n(0)$.

Ainsi, $\prod_{k=1}^{n} x_k = \boxed{(-1)^n \frac{a_n}{2^{n+1}}}$. On laisse le soin au lecteur d'aller rechercher l'expression de a_n dans les premières questions. On vérifie que quand n est impair, $x_{\frac{n+1}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et le produit est alors bien nul.

(e) Si $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} x_k = -c_{n-1}$ en identifiant dans les deux écritures le coefficient de x^{n-1}. Le polynôme T_n étant de la parité de n, il n'a pas de termes de parité opposée, donc en particulier pas de terme de degré $n-1$. Ainsi $c_{n-1} = 0$ et $\boxed{\text{la somme est nulle}}$.

B Deux sommes

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(a) $\boxed{\frac{1}{k(k-1)} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}}$. Par télescopage, $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout k, on a $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$.

$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$. Donc $\boxed{S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}}$.

(c) D'une part (S_n) est une suite croissante car $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ pour tout n.

D'autre part (S_n) est majorée par 2 d'après ce qui précède.

Donc $\boxed{(S_n) \text{ est une suite convergente}}$. On note ℓ sa limite.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant termes pairs et impairs, on a $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$.

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} S_n$.

Donc $\boxed{S_{2n} = I_n + \frac{1}{4} S_n}$.

Avec $n = 3$: $S_6 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} = \underbrace{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}}_{I_3} + \frac{1}{4}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)}_{S_3}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = S_{2n} - \frac{1}{4}S_n$, ce qui en fait une $\boxed{\text{suite convergente}}$. On note ℓ' sa limite.

On a alors $\boxed{\ell' = \frac{3}{4}\ell}$.

C Calcul de limite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on rappelle la notation $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

9. Une formule générale de dérivation : soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables. On montre par récurrence que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{k=1}^{n}\left(f_k' \times \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} f_i\right).$$

La formule est vraie pour $n = 1$, $n = 2$.

Si on la suppose vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit $\prod_{i=1}^{n+1} f_i = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \times f_{n+1}$ et on applique la formule de dérivée d'un produit de 2 fonctions puis l'hypothèse de récurrence.

Pour 3 fonctions : $\boxed{(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'}$.

10. Soit I un intervalle ne contenant aucun des x_k. On a $T_n = 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$. On applique la formule précédente avec $f_i : x - x_i$. $T_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 \times \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}}(x - x_i)\right)$.

Le quotient donne alors $\boxed{\forall x \in I, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x - x_k}}$.

11. On évalue cette égalité en $x = 1$ pour obtenir $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = n^2}$.

12. (a) La formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ donne $\boxed{1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \boxed{\frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}}$.

(c) D'après 11, $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = n^2$, d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = 2n^2}$.

Et 12b donne $\frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$. D'où $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = 2n^2 - n}$.

13. (a) sin et tan sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. sin est concave car $\sin'' = -\sin$ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tan est convexe. Donc par comparaison avec leur tangente en 0, on a $\boxed{\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$.

Remarque. Sans convexité, on peut aussi écrire une IAF en 0 voire faire une étude de la différence (plus long).

(b) Cela donne $\dfrac{1}{\tan^2 t} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Donc $\boxed{2n^2 - n \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2} \leqslant 2n^2}$.

Ainsi en divisant par $\dfrac{16n^2}{\pi^2}$, $\boxed{\dfrac{2n^2 - n}{16n^2}\pi^2 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}}$.

(c) D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\ell' = \dfrac{\pi^2}{8}}$.

(d) Finalement, $\ell = \dfrac{4}{3}\ell'$ donc $\boxed{\ell = \dfrac{\pi^2}{6}}$.