

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le but du problème est le calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de M^n de différentes

manières. Les cinq questions de ce problème sont donc indépendantes, à l'exception d'une relation réutilisée en question 5.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Exprimer A^2 en fonction de A .

(b) En remarquant que $M = A + I_3$, exprimer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer M^2 et déterminer a et b réels tels que

$$M^2 = aM + bI_3. \quad (E1)$$

(a) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = a_n M + b_n I_3.$$

On donnera les valeurs de a_0, b_0, a_1 et b_1 et on établira les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n .

(b) Montrer que (a_n) et (b_n) vérifient toutes deux la même relation de récurrence linéaire à deux termes.

(c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n .

(d) En déduire une expression de M^n et comparer avec la question 1b.

3. (a) Déterminer les deux valeurs de λ telles que la matrice $A - \lambda I_3$ soit de rang inférieur à 3. On les nommera λ_1 et λ_2 de sorte que $\text{rg}(A - \lambda_1 I_3) = 1$ et $\text{rg}(A - \lambda_2 I_3) = 2$.

(b) Soit $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_1 X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_2 X\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et exprimer X_1, X_2, X_3 tels que

$$E_1 = \text{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}(X_2, X_3).$$

(c) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 . Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.

(d) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

(e) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de A^n en fonction de D^n, P et P^{-1} .

4. (a) Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 5 + 4u_n & -4 - 4u_n & -1 - u_n \\ u_n + 1 & -u_n & -1 - u_n \\ 0 & 0 & 3u_n + 4 \end{pmatrix}.$$

On donnera la valeur de u_0 et on établira la relation entre u_{n+1} et u_n .

- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n et comparer avec la question 1b.
5. Cette méthode utilise la relation (E1) obtenue précédemment et donne une autre méthode pour calculer les coefficients a_n et b_n .
- (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - aX - b$.
- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de M^n en fonction de n et comparer avec la question 1b.

Problème 2

Le but de ce problème est de déterminer le sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes qui sont divisibles par leur dérivée. Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un élément de E si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes constants appartenant à E se résume à $\{0\}$.
2. Soit $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que le polynôme $\lambda(X - \alpha)^n$ appartient à E .
3. Soit $P \in E$ un polynôme de degré $n \geq 1$.
 - (a) Déterminer le degré du polynôme Q tel que $P = Q \times P'$.
 - (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (que l'on n'essaiera pas de calculer) tel que $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$.
 - (c) Montrer par récurrence que pour tout entier $0 \leq k \leq n - 1$,

$$P^{(k)} = \frac{1}{n - k}(X - \alpha) \times P^{(k+1)}.$$

- (d) Décrire l'ensemble des racines de P en précisant la multiplicité associée. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Conclure.

Problème 3

A Cadre d'étude

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une assemblée de n personnes que l'on répartit dans p salles distinctes (numérotées de 1 à p). Les personnes sont indifférenciées, c'est-à-dire qu'on s'intéresse seulement à l'effectif de chaque salle. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note x_i le nombre de personnes présentes dans la salle i .

1. Déterminer le nombre de répartitions possibles des n personnes, c'est-à-dire le nombre de p -uplets d'entiers naturels $(x_1, \dots, x_p)$ tels que

$$x_1 + \dots + x_p = n.$$

Dans toute la suite, on y fera référence en parlant simplement de **répartitions**. On notera $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\}.$$

B Propriété de minimisation discrète

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

2. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $b \geq a + 2$. Montrer que

$$f(a) + f(b) \geq f(a + 1) + f(b - 1).$$

On définit, pour tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$, la quantité

$$T(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p f(x_i),$$

que l'on souhaite minimiser, c'est-à-dire que l'on cherche le ou les p -uplets de $\mathcal{C}$ pour lesquels les valeurs de T sont minimales. On dira qu'un tel p -uplet **minimise** T .

3. Montrer que si un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$ minimise T , alors

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x_i - x_j| \leq 1.$$

4. On écrit $n = qp + r$ la division euclidienne de n par p . Montrer que tout p -uplet minimisant T est constitué de

- r éléments égaux à $q + 1$,
- $p - r$ éléments égaux à q .

C Application au problème des interactions

Dans chaque salle, les personnes interagissent : dans une même salle, chaque paire de personnes présente se serre la main. Ainsi si une personne est seule dans sa salle, il n'y a aucune poignée de mains ; si exactement deux personnes sont présentes dans une salle, il y aura une poignée de mains, etc.

5. On rappelle que pour tout i , x_i désigne le nombre de personnes dans la salle i . Montrer que le nombre total de poignées de mains échangées est

$$T = \sum_{i=1}^p \binom{x_i}{2}.$$

6. Déterminer les répartitions minimisant le nombre total de poignées de mains.
 7. Déterminer le nombre de répartitions minimisant le nombre de poignées de mains.

D Maximisation

8. Montrer que si un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$ maximise T , alors au plus un des x_i est non nul.
 9. Déterminer les p -uplets maximisant T et dénombrer les répartitions réalisant cette propriété.

E Propriété de minimisation continue

On appelle toujours $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et on considère l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\}.$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p$, on note toujours $T(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p f(x_i)$.

10. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{S}$,

$$\sum_{i=1}^p f(x_i) \geq pf\left(\frac{n}{p}\right).$$

et en déduire le p -uplet en lequel le minimum de T est atteint sur $\mathcal{S}$.