Problème 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{A^2 = 3A}$

   (b) On remarque que $M = A + I_3$. Comme M et I_3 commutent ($MI_3 = I_3M = M$), on peut appliquer la formule du binôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I^{n-k}$.

   Or d'après ce qui précède, on montre par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$. De plus $A^0 = I_3$.

   D'où $M^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} A = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) A$.

   Or $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ en reconnaissant une formule du binôme sur les nombres réels.

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A}$.

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 21 & -20 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \boxed{5M - 4I_3}$.

   (a) **Init.** $M^0 = a_0 M + b_0 I_3$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
   Alors $M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M = a_n(5M - 4I_3) + b_n M = (5a_n + b_n)M - 4a_n I_3$.
   En posant $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$.

   On a donc montré par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$M^n = a_n M + b_n I_3.$$

   Elles vérifient $\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}}$.

   (b) La relation de récurrence donne pour tout n, $a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$, d'où $\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n}$.
   Elle donne aussi $b_{n+2} = -4a_{n+1}$, d'où $b_{n+2} = -4(5a_n + b_n) = 5 \times (-4a_n) - 4b_n$. Mais $-4a_n = b_{n+1}$.
   Finalement, $\boxed{b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n}$.

   (c) Étude de la relation de récurrence $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$:
   l'équation caractéristique est $X^2 - 5X + 4 = 0$, de racines 4 et 1.
   Donc les suites solutions sont de la forme $(\lambda 4^n + \mu)_n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \mu = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

  Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)}$.
- $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda + \mu = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

  Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -\frac{1}{3}(4^n - 4)}$.

(d) Finalement $\boxed{M^n = a_n M + b_n I_3 = \frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}$.

En utilisant $M = A + I_3$, on obtient $M^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \underbrace{\left(\frac{1}{3}(4^n - 1) - \frac{1}{3}(4^n - 4)\right)}_{=1} I_3$.

On retrouve le résultat de la question 1b.

3. On fait tous les calculs avec M. Si on veut les faire avec A, on aura $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$ à la place.

(a) À l'aide du pivot de Gauß (commencer par $L_1 \leftrightarrow L_3$), on obtient $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 4}$.

(b) Soit

$$E_1 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda_1 X\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda_2 X\}.$$

On a

$$E_1 = \operatorname{Ker}(X \mapsto MX - \lambda_1 X) \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{Ker}(X \mapsto MX - \lambda_2 X),$$

où on prendra soin de montrer la linéarité. E_1 et E_2 sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La résolution des systèmes $(M - \lambda_1 I_3)X = 0$ et $(M - \lambda_2 I_3)X = 0$ donne par exemple

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_2 = \operatorname{Vect}(X_2, X_3)}.$$

(c) On a alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $\boxed{MP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

(d) Par la méthode de votre choix, on obtient $\boxed{P \text{ est inversible } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

(e) On montre par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}}$.

D'après la question précédente, P étant inversible, on a $M = PDP^{-1}$. On montre alors par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}}$.

4. Une petite dernière.
   (a) On procède par récurrence.

   $\boxed{\text{Init.}}$ $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 5+4u_0 & -4-4u_0 & -1-u_0 \\ u_0+1 & -u_0 & -1-u_0 \\ 0 & 0 & 3u_0+4 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = -1$.

   $\boxed{\text{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe u_n tel que $M^n = \begin{pmatrix} 5+4u_n & -4-4u_n & -1-u_n \\ u_n+1 & -u_n & -1-u_n \\ 0 & 0 & 3u_n+4 \end{pmatrix}$.

   Alors $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 5+4u_n & -4-4u_n & -1-u_n \\ u_n+1 & -u_n & -1-u_n \\ 0 & 0 & 3u_n+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   D'où $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 21+16u_n & -20-16u_n & -5-4u_n \\ 4u_n+5 & -4u_n-4 & -5-4u_n \\ 0 & 0 & 12u_n+16 \end{pmatrix}$.

   Cela donne $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5+4(4+4u_n) & -4-4(4+4u_n) & -1-(4+4u_n) \\ (4u_n+4)+1 & -(4u_n+4) & -1-(4+4u_n) \\ 0 & 0 & 3(4+4u_n)+4 \end{pmatrix}$.

   En posant $u_{n+1} = 4u_n + 4$, on a $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5+4u_{n+1} & -4-4u_{n+1} & -1-u_{n+1} \\ u_{n+1}+1 & -u_{n+1} & -1-u_{n+1} \\ 0 & 0 & 3u_{n+1}+4 \end{pmatrix}$.

   La suite ainsi définie vérifie $\boxed{\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 4 \end{cases}}$.

   (b) On étudie la suite arithmético-géométrique (u_n). Pour cela on démontre que $(u_n + \frac{4}{3})_n$ est géométrique et vérifie $u_{n+1} + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{4}{3})$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1}{3}(4^n - 4)}$.

   Cela donne bien $M^n = M + u_n A = (A + I) + u_n A = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A$.

5. Division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$: il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X^2 - 5X + 4)Q + R$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{R}_1[X]$.
   L'évaluation de cette égalité en 1 et 4, racines de $X^2 - 5X + 4$, donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ \beta = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases}.$$

   Finalement $M^n = R(M) = \alpha M + \beta I_3 = \boxed{\frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}$, comme en 2d.

Problème 2

Le but de cet exercice est de déterminer le sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes qui sont divisibles par leur dérivée. Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un élément de E si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. **Analyse** Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P = a$ un polynôme constant. Alors $P' = 0$. Si P' divise P, alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $a = Q \times 0$ et alors $a = 0$.

Synthèse Le polynôme nul appartient à E car sa dérivée est 0 également et il existe bien Q tel que $0 = Q \times 0$ (n'importe quel Q convient).

Donc $\boxed{\mathbb{C}_0[X] \cap E = \{0\}}$.

2. Soit $n \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit $P = \lambda(X-\alpha)^n$. Alors $P' = \lambda n(X-\alpha)^{n-1}$.
   On a $P(X) = \left(\frac{1}{n}(X-\alpha)\right) P'(X)$. Donc P' divise P et donc $\boxed{P \in E}$.
3. Soit $P \in E$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$.
   (a) On a $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$ avec $\deg(P) = \deg(QP') = \deg(Q) + \deg(P')$. Or $\deg P = n$ et $\deg P' = n-1$. Donc $\boxed{\deg Q = 1}$.
   (b) Q est de degré 1 donc il s'écrit $\lambda(X-\alpha)$ avec α sa racine dans $\mathbb{C}$ et λ son coefficient dominant.
   De plus, si on examine le coefficient dominant de P, on a $P = a_n X^n + B(X)$ avec $\deg B \leqslant n-1$.
   Donc $P' = na_n X^{n-1} + B'(X)$.
   Ainsi $QP' = \lambda n a_n X^n + \underbrace{\ldots}_{\deg \leqslant n-1} = P$. Par unicité des coefficients (en particulier du coefficient dominant non nul de P), on a $\lambda n a_n = a_n$. Donc $\lambda = \frac{1}{n}$.
   Finalement, $\boxed{Q = \frac{1}{n}(X-\alpha)}$.
   (c) **Init.** $P^{(0)} = P = \frac{1}{n}(X-\alpha) \times P'$ d'après la question précédente.
   Hér. Soit $0 \leqslant k \leqslant n-2$ et supposons que $P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}$.
   Alors $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' = \frac{1}{n-k}\left[P^{(k+1)} + (X-\alpha)P^{(k+2)}\right]$.
   Donc $\left(1 - \frac{1}{n-k}\right) P^{(k+1)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)}$. Finalement, $P^{(k+1)} = \frac{1}{n-(k+1)}(X-\alpha)P^{(k+2)}$.
   On a donc montré par récurrence que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
   $$\boxed{P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-\alpha) \times P^{(k+1)}}.$$
   (d) En évaluant cette égalité en α, on a $\boxed{P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ pour tout } 0 \leqslant k \leqslant n-1}$.
   Ceci montre que α est racine de P et de ses dérivées successives, donc racine de P de multiplicité au moins n. P étant de degré n, il n'a pas d'autre racine.
   Donc $\boxed{\text{la seule racine de } P \text{ est } \alpha \text{, de multiplicité } n}$.
   Finalement, $\boxed{P = a_n(X-\alpha)^n}$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. La question 3 est l'analyse du problème. La synthèse a été effectuée à la question 2. On a montré que $\boxed{E = \{a(X-\alpha)^n, n \in \mathbb{N}^*, a, \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{0\}}$.

Problème 3

1. Si on représente une répartition comme un alignement de personnes et de cloisons, une répartition revient à ordonner $n+p-1$ objets, à savoir n personnes ($\bullet$) et $p-1$ cloisons (pour délimiter les p salles. Par exemple
   $$\bullet\bullet \mid \mid \bullet\bullet \mid \bullet \quad \text{et} \quad \mid \bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid$$

représentent les répartitions $2+0+2+1$ et $0+2+3+0$ dans le cas $n=5$ et $p=4$.
On dénombre cela soit comme une anagramme, soit comme les parties à $p-1$ éléments (le choix des places des $|$) dans un ensemble à $n+p-1$ éléments (les places disponibles) et on obtient

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p-1} \text{ répartitions}}.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \geqslant a+2$.
D'après la croissance des pentes, on a $f(a+1)-f(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f(b)-f(b-1)$.
D'où
$$f(a+1)-f(a) \leqslant f(b)-f(b-1).$$
On réarrange.
$$\boxed{f(a+1)+f(b-1) \leqslant f(a)+f(b)}.$$

3. Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe $i, j \in [\![1, p]\!]$ tels que $x_j \geqslant x_i+2$.
On définit un nouveau p-uplet en posant $y_i = x_i+1$, $y_j = x_j-1$ et $y_k = x_k$ sinon.
On a toujours $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} y_k = n$, mais d'après la question 2 $f(y_i)+f(y_j) \leqslant f(x_i)+f(x_j)$.
Donc
$$T(y_1, \ldots, y_p) \leqslant T(x_1, \ldots, x_p).$$
Là la question est légèrement inexacte : si l'inégalité est stricte, le p-uplet initial n'était pas minimal. Ainsi tout minimiseur strict vérifie
$$|x_i - x_j| \leqslant 1.$$
Pour gérer les cas d'égalité, il faudrait travailler avec une fonction strictement convexe. Ici, tous les minimiseurs ne sont pas tels qu'annoncés, mais un minimum est toujours atteint par un p-uplet de la forme annoncée.

4. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ minimisant T et posons $m = \min x_i$.
D'après la question précédente, les x_i prennent uniquement les valeurs m ou $m+1$.
Notons k le nombre d'indices tels que $x_i = m+1$. Alors
$$n = k(m+1)+(p-k)m = pm+k.$$
Par unicité de la division euclidienne, $m=q, \quad k=r$.
On a donc $\boxed{r \text{ éléments égaux à } q+1 \text{ et } p-r \text{ éléments égaux à } q}$.

5. Chaque poignée de mains se déroule dans l'une des p salles.
Dans la salle i, le nombre de paires de personnes est donné par le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à x_i éléments, soit $\dbinom{x_i}{2}$.
Donc au total, $\boxed{T = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \binom{x_i}{2}}$.

6. Pour tout i, $\dbinom{x_i}{2} = \dfrac{x_i(x_i-1)}{2}$. La fonction
$$f : x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$$

est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}_+$ car de classe $\mathcal{C}^2$ (comme une fonction polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) = 1 > 0$. On note encore $n = qp + r$ la division euclidienne de n par p (notamment $q = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$). La partie précédente montre qu'on a une valeur de T minimale si et seulement si r salles contiennent $q+1$ personnes et $n-r$ salles contiennent q personnes.

7. Une répartition minimisant le coût correspond au choix des r salles contenant $q+1$ personnes.

   Le nombre de répartitions minimales est donc $\boxed{\binom{p}{r}}$.

8. Même remarque sur le problème de stricte convexité et de stricte minimisation.
   S'il existe $i \neq j$ tels que $0 < x_i < x_j$, alors ils sont aussi inférieurs à n. Dans ce cas, on a, d'après la question 2, $f(x_i) + f(x_j) \leqslant f(x_i - 1) + f(x_j + 1)$ et le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ ne maximise pas T. Ainsi, si on a un maximum en $(x_1, \ldots, x_p)$, alors $\boxed{\text{au plus un des } x_i \text{ est non nul}}$.

9. Les p-uplets maximisant T sont donc tels que $\boxed{\exists i_0 \in [\![1, p]\!],\ x_{i_0} = n \text{ et } \forall i \neq i_0,\ x_i = 0}$.

   Une telle répartition revient au choix de $i_0 \in [\![1, p[\![$, soit $\boxed{p \text{ possibilités}}$.

10. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction f.

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p} f(x_i)$$

   avec les $\frac{1}{p}$ qui sont bien tels que $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{p} = 1$.
   En factorisant par $\frac{1}{p}$ et comme $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$, on obtient

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} f(x_i) \geqslant p f\left(\frac{n}{p}\right)}.$$

   Un p-uplet réalisant cela est $\left(\frac{n}{p}, \ldots, \frac{n}{p}\right)$ *(avec la même réserve que précédemment sur la question de la stricte minimalité).*