

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans tout problème, on note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $g \in E$. L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation intégrale suivante, d'inconnue $f \in E$.

$$(\mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x).$$

Pour tout $f \in E$, on note $A(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt.$$

On note aussi $D_2 : E \rightarrow E$, l'application linéaire définie par $\forall f \in E, D_2(f) = f''$.

A Étude de A

1. Soit $f \in E$.
 - (a) Montrer que $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
 - (b) Calculer $A(f)'(x)$ et $A(f)''(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que A est un endomorphisme de E .
 - (b) Montrer que A est injective.
3. On pose $p = A \circ D_2 \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Montrer que p est un projecteur.
 - (b) Déterminer $\text{Ker } p$.
4. (a) Soit $f \in E$. Justifier l'existence de $u \in E$ tel que $u'' = f$, $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.
 - (b) En déduire que $\text{Im } p = \text{Im } A$.
5. (a) Soit $f \in E$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, p(f)(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$.
 - (b) En déduire $\text{Im } A$.

B Étude des solutions de $(\mathcal{E})$

Soit $g \in E$. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{F}) : y'' - y = g(x)$, d'inconnue $y \in E$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{F})$.

6. Montrer que $(\mathcal{F})$ admet une unique solution $h \in E$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$.
7. (a) Soit $u \in E$ tel que $u(0) = u'(0) = 0$. Montrer que u est solution de $(\mathcal{F}) \Leftrightarrow u''$ est solution de $(\mathcal{E})$.
 - (b) En déduire que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution $f \in E$ dont on donnera une expression à l'aide de h .
8. Déterminer la solution $f \in E$ de $(\mathcal{E})$ lorsque $g = \exp$.