

CHAPITRE B6

COMPARAISONS LOCALES

Objectifs

- Notions d'équivalence, de domination et de négligeabilité.
- Lien avec le comportement asymptotique.

1 Les trois relations

Définition B6.1

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles, (v_n) ne s'annulant pas à pcr.

- On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on note $u_n = o(v_n)$.
- On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** lorsque $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on note $u_n \sim v_n$.
- On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est majorée et on note $u_n = O(v_n)$.

Définition B6.2

Soit f et g deux fonctions réelles définies sur D et $a \in \overline{D}$. En a ,

- on dit que f est **négligeable devant** g lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et on note $f = o(g)$.
- on dit que f et g sont **équivalentes** lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et on note $f \sim g$.
- On dit que f est **dominée par** g lorsque $\frac{f}{g}$ est majorée et on note $f = O(g)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, et de même $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ et $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$. On note de même $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ et $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$.

**Exemples.**

- $n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^2)$, $\sqrt{n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$,
- $\frac{1}{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{1}{n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- $n + 28 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, $n^2 + 28n + 496 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$.

Théorème B6.3

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Alors

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Exemples.

- En $+\infty$: $x = \underset{x \rightarrow \infty}{o}(x^2)$, $\frac{1}{x^2} = \underset{x \rightarrow \infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$,
- En 0 : $x^3 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$, $x^2 = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$.
- $x + 28 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, $x^2 + 28x + 496 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$

Théorème B6.4

Soit f et g deux fonctions réelles. Alors

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g).$$

Dém. B6.4

$$f - g = o(g) \Leftrightarrow \frac{f - g}{g} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \rightarrow 1 \Leftrightarrow f \sim g.$$

Exemple. $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ car $x = o(x^2)$. Voir aussi que $x^2 + x = \underbrace{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 1}$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :

Proposition B6.5

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Proposition B6.6

La relation $\sim$ est

réflexive : $f \sim f$;

symétrique : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$;

transitive : $\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g \sim h \end{array} \right\} \Rightarrow f \sim h.$

Remarques.

- Dire $u_n = o(1)$ revient à dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ revient à dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarques.

- Dire $f = o(1)$ revient à dire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $f \sim \ell$ revient à dire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarques.

- On a aussi $f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(f)$. Comprendre que f et g sont équivalentes si et seulement si leur différence est négligeable devant l'une des deux, *i.e.* leur ordre de grandeur (commun!).
- On peut avoir $f \sim g$ sans que $f - g$ soit « petit » dans l'absolu. Par exemple $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et leur différence vaut x , qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Mais on a $x = o(x^2)$.
- Quand on donne un équivalent, inutile de donner plusieurs termes de différents ordres de grandeur. Par exemple, $x^2 + x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 + x$ est vrai mais inopérant car on a aussi $x^2 + x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 + 28x$. Le seul équivalent immuable et donc le seul intéressant est $x^2 + x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

2 Utilisation

Proposition B6.7 (Comparaison et limites)

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs positives,

$$\left. v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell;$$

$$\left. u_n = o(v_n) \right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0;$$

$$\left. u_n = o(v_n) \right\} \Rightarrow v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Proposition B6.8 (Comparaison et limites)

Étant données deux fonctions f et g à valeurs positives,

$$\left. g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell;$$

$$\left. f = o(g) \right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0;$$

$$\left. f = o(g) \right\} \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} +\infty.$$

3 Calcul

Proposition B6.9

Soit $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ définissant quatre suites réelles. Alors

- (i) $u_n v_n \sim a_n b_n$;
- (ii) si u_n et v_n ne s'annulent pas à pcr, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$;
- (iii) si $u_n \geq 0$ à pcr, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition B6.10

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f \sim_a u$ et $g \sim_a v$ définissant quatre fonctions réelles. Alors

- (i) $fg \sim_a uv$;
- (ii) si g et v ne s'annulent pas, alors $\frac{f}{g} \sim_a \frac{u}{v}$;
- (iii) si $f \geq 0$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha \sim_a u^\alpha$.

Dém. B6.10

- (i) $\frac{fg}{uv} = \frac{f}{u} \frac{g}{v}$ donc : si $\frac{f}{u} \rightarrow 1$ et $\frac{g}{v} \rightarrow 1$, alors $\frac{fg}{uv} \rightarrow 1$.
- (ii) $\frac{f/g}{u/v} = \frac{f}{g} \frac{v}{u} \dots$
- (iii) $\frac{f^\alpha}{u^\alpha} = \left(\frac{f}{u}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln(f/u)}$ donc si $\frac{f}{u} \rightarrow 1$, $\ln(f/u) \rightarrow 0$, donc $\frac{f^\alpha}{u^\alpha} \rightarrow 1$.



Remarque.  Attention !

- On ne somme pas d'équivalents : soit $f(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = -x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} -x^2$. Bien sûr on ne peut absolument pas écrire que $f + g \sim 0$, c'est pire que faux !
Contre-exemple (légèrement) moins stupide : $x + 1 \sim x + 2$ et $-x \sim -x$ mais on n'a pas $1 \sim 2$.
- On ne compose pas les équivalents à gauche (en particulier on ne les passe pas au log ou à l'exponentielle). Contre-exemple : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} = ee^x$ qui n'est pas équivalent à e^x .

Proposition B6.11

Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

- (i) $\left. \begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n = o(w_n),$
- (ii) $\left. \begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o(w_n),$
- (iii) Si $u_n = o(w_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Proposition B6.12

Soit f, g et h trois fonctions réelles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

- (i) $\left. \begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha f + \beta g = o(h),$
- (ii) $\left. \begin{array}{l} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array} \right\} \Rightarrow f = o(h),$
- (iii) Si $f = o(h)$, alors $fg = o(hg)$.

Dém. B6.12

$$(i) \quad \frac{\alpha f + \beta g}{h} = \alpha \frac{f}{h} + \beta \frac{g}{h}, \quad (ii) \quad \frac{f}{h} = \frac{f}{g} \frac{g}{h}, \quad (iii) \quad \frac{fg}{hg} = \frac{f}{h}.$$

Proposition B6.13 (Suites de référence)

Soit $x > 1$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors

- $(\ln n)^\beta = o_{n \rightarrow \infty}(n^\alpha),$
- $n^\alpha = o_{n \rightarrow \infty}(x^n),$
- $x^n = o_{n \rightarrow \infty}(n!),$
- $n! = o_{n \rightarrow \infty}(n^n).$

Proposition B6.14 (Croissances comparées)

Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$ avec $\alpha < \beta$. Alors

- (i) En 0 :
 $|\ln x|^\gamma = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ et $\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right).$
- (ii) En $+\infty$: $x^\alpha = o(x^\beta), x^\alpha = o(e^x)$ et $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha).$

Théorème B6.15 (Équivalents usuels)

Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Alors

- (i) $\sin u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (ii) $\tan u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (iii) $\operatorname{sh} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (iv) $\operatorname{th} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (v) $\operatorname{Arctan} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (vi) $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (vii) $(e^{u_n} - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$;
- (viii) $((1 + u_n)^\alpha - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$;
- (ix) $1 - \cos u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$.

Théorème B6.16 (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants.

- (i) $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (ii) $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (iii) $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (iv) $\operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (v) $\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- (vi) $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (vii) $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$;
- (viii) $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$;
- (ix) $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$;

Remarque. Plus généralement, on peut retenir que pour f une fonction dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$ et (u_n) qui converge vers 0, on a

$$(f(u_n) - f(0)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$

Remarque. Plus généralement, si f est dérivable en $a \in D$ avec $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Dém. B6.16

$$(i) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \text{ donc } \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x - a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

Méthodes

- Vérifier une relation de comparaison par quotient.
- Déterminer un équivalent
 - d'un produit, d'un quotient,
 - d'une somme en gardant une trace du reste,
 - avec les équivalents usuels.