

TD B6. Comparaisons locales

1 Propriétés

Exercice B6.1

Soit f, g, h, k des fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

1. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
2. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $f \underset{a}{\sim} h$, alors $h \underset{a}{=} o(g)$,
3. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
4. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
5. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.

Exercice B6.2

Soit f, g deux fonctions définies sur I et $u : J \rightarrow I$. Soit $a \in \overline{J}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b$. Montrer que

1. si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} o(g \circ u)$,
2. si $f \underset{b}{=} O(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} O(g \circ u)$,
3. si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Exercice B6.3

Soit f, g, h, k des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose

- (i) $\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
- (ii) $f \underset{a}{\sim} k$ et $h \underset{a}{\sim} k$.

Montrer que $g \underset{a}{\sim} k$.

Exercice B6.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec 0 adhérent à I . On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax + b) \underset{x \rightarrow a}{=} o(x)$. Donner, éventuellement en fonction des valeurs de a et b , un équivalent de f en 0.

2 Calculs

Exercice B6.5

Classez par « ordre de négligeabilité » les suites :

1. $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{\ln n}{n}\right), \left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.
2. $(n), (\sqrt{n} \ln n), (n \ln n), (n^2), \left(\frac{n^2}{\ln n}\right)$.

**Exercice B6.6** ⚙

Déterminer un équivalent et la limite quand $n \rightarrow +\infty$ des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| (a) $n^2 - \ln(n^3 + 1)$, | (g) $\frac{\sin(1/n) + 1}{\tan(\frac{1}{n^2})}$, |
| (b) $n \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)$, | (h) $e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, |
| (c) $\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}$, | (i) $\ln \left(\frac{n^2 - n + 5}{n^2 + n - 3} \right)$, |
| (d) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$, | (j) $\tan \left(\ln \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right)$. |
| (e) $n^{1/n} - 1$, | |
| (f) $\ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$, | |

Exercice B6.7 ⚙

Donner des équivalents simples des expressions suivantes.

- | | | |
|---|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$, | 3. $x^{1/x} - 1$ en $+\infty$, | 5. $\ln(\cos(28x))$ en 0, |
| 2. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ en $+\infty$, | 4. $\cos(\sin(x))$ en 0, | 6. $(x + \sin x)^{\frac{1}{3}}$ en 0. |

Exercice B6.8 ⚙⚙

Soit $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les limites suivantes.

- | | |
|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{e^x - 1}$, | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$, |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)}$, | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + x^2 - x)}{x^2(x-1)(x+2)}$, |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \sin x} - 1}$, | 7. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^\alpha - \alpha^x}{x^x - \alpha^\alpha}$, |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$, | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{\lambda x}$. |

Exercice B6.9 ⚙

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d a-t-on

$$\frac{1}{t^a(\ln t)^b} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o \left(\frac{1}{t^c(\ln t)^d} \right) ?$$

Exercice B6.10 ⚙️⚙️

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \neq 0$. Établir les équivalents suivants.

1. $\sum_{k=1}^n k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2},$
2. $\sum_{i=0}^n u_i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2 r}{2},$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n),$
4. $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8n^2},$

Exercice B6.11 ⚙️⚙️⚙️

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À l'aide d'équivalents, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1))^\alpha - (\ln x)^\alpha$.

3 Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice B6.12 ⚙️⚙️ (Équivalent des intégrales de Wallis)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'intégrale définie par $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$. On admet que (W_n) est décroissante et minorée par 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

1. Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ puis en déduire que $W_{n+1} \sim W_n$ (quand n tend vers $+\infty$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.
 - (b) En déduire que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

Exercice B6.13 ⚙️⚙️ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $K_n = \int_0^1 e^{t^n} dt$.

1. Montrer que (K_n) est décroissante et minorée par 0.
2. Pour tout $n > 0$, établir une relation entre K_n et K_{n+1} .
3. Montrer que (K_n) converge vers 0.
4. Montrer que $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

Exercice B6.14 ⚙️⚙️

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que (u_n) possède une limite et la déterminer.
2. Montrer que $\forall n > 2, u_n \leq \ln(2n)$ (on pourra utiliser que $\forall x > 0, \ln(x) \leq x$).
3. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
4. Montrer que $u_n - \ln n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

**Exercice B6.15**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, cette équation admet une unique solution que l'on notera x_n .
2. Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. Montrer que $x_n - n \sim \ln n$.

Exercice B6.16

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n le nombre réel solution de $\tan x = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Soit $y_n = x_n - n\pi$. Montrer que $y_n \sim \pi/2$.
3. Soit $z_n = y_n - \frac{\pi}{2}$. Montrer que $z_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.