

TD C5. Fractions rationnelles

Exercice C5.1

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

(a) $\frac{1}{X^2 + 28},$

(b) $\frac{X^2 + 14}{X^2 + 42},$

(c) $\frac{X^4 + 1}{(X^2 + 1)(X + 1)^2},$

(d) $\frac{X^2 + 3X + 1}{(X - 2)(X - 1)^2},$

(e) $\frac{3}{X^3 + 1},$

(f) $\frac{1}{(X^2 - 1)(X^2 + 4)}.$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

(a) $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2},$

(b) $\frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^2},$

(c) $\frac{X}{(X^2 + 1)(X^2 - j^2)^2}.$

Exercice C5.2

Simplifier $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ et calculer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice C5.3

Calculer les limites et intégrales suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t \, dt}{t^4 + 1},$

3. $\int_{-1}^1 \frac{t^2 \, dt}{t^2 + 2t + 5},$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t \, dt}{(t+1)^2(2t+1)},$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2(t^2 - 2t + 2)}.$

Exercice C5.4

Calculer les dérivées successives de

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1},$

2. $x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}.$

Exercice C5.5

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $F(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}.$

2. En déduire $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+1)^3 U(X) + (X-1)^3 V(X) = 1.$

Exercice C5.6

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\frac{X^{11}}{(X^2 + X + 1)^4}.$

Exercice C5.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ de $\frac{1}{X^{2n} - 1}.$

**Exercice C5.8** ⚙

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (X - k)}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$.
3. Comment peut-on obtenir ce résultat d'une autre manière ?

Exercice C5.9 ⚙⚙

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}^3$ et $F = \frac{aX^2 + bX + c}{(X-1)^2(X-2)^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que F admette une primitive rationnelle.

Exercice C5.10 ⚙⚙

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\frac{X^m}{(X-1)^n}$.

Exercice C5.11 ⚙⚙⚙ (théorème de Gauß-Lucas)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $z_1, \dots, z_r$ ses racines distinctes. Montrer que pour toute racine z de P' , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ et $z = \sum_{i=1}^r \lambda_i z_i$.