

Problème 1

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et l'on considère l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

1. (a) Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' = \lambda P'' + Q'' - X(\lambda P' + Q') = \lambda f(P) + f(Q).$$

Ainsi, f est une application linéaire, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- (b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } k = 0, f(1) = 0.$$

$$\text{Si } k = 1, f(X) = -X.$$

$$\text{Si } k \geq 2,$$

$$f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k.$$

- ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré n et

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad a_n \neq 0.$$

Par linéarité,

$$f(P) = \sum_{k=0}^n a_k f(X^k) = \sum_{k=0}^n a_k (k(k-1)X^{k-2} - kX^k).$$

$$\text{Si } n = 0, f(P) = 0.$$

Si $n \geq 1$, le terme dominant de $f(P)$ est $-na_n X^n$, donc

$$\deg(f(P)) = n.$$

- (c) Soit $P \in \text{Ker}(f)$. Alors $P'' - XP' = 0$.

D'après la question précédente, cela implique que P est constant. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X].$$

- (d) Les polynômes constants non nuls n'ont pas d'antécédent par f . Donc f n'est pas surjective.

2. On introduit

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ est pair}\}, \quad \mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ est impair}\}.$$

- (a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On a

$$P(-X) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k X^k.$$

Donc

$$P(-X) = P(X) \iff a_k(-1)^k = a_k \iff a_k = 0 \text{ si } k \text{ impair.}$$

Ainsi

$$P(-X) = P(X) \iff P \in \mathcal{P}.$$

(b) De même,

$$P(-X) = -P(X) \iff a_k(-1)^k = -a_k \iff a_k = 0 \text{ si } k \text{ pair.}$$

Donc

$$P(-X) = -P(X) \iff P \in \mathcal{I}.$$

(c) Les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont clairement stables par combinaison linéaire, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

(d) On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{1}{2}(P(X) - P(-X)).$$

Le premier terme est pair et le second impair. Ainsi

$$\mathbb{R}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

(e) Soit $P \in \mathcal{P}$. Alors

$$P(-X) = P(X) \Rightarrow P'(-X) = -P'(X), \quad P''(-X) = P''(X).$$

Donc

$$f(P)(-X) = P''(-X) + XP'(-X) = P''(X) - XP'(X) = f(P)(X).$$

Ainsi $f(P) \in \mathcal{P}$.

De même, si $P \in \mathcal{I}$,

$$P'(-X) = P'(X), \quad P''(-X) = -P''(X),$$

et donc

$$f(P)(-X) = -f(P)(X).$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par f .

3. On note g la restriction de f à $\mathcal{I}$.

(a) D'après la question précédente, $\mathcal{I}$ est stable par f . Donc g est bien définie et linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{I}$.

(b) Si $P \in \text{Ker}(g)$, alors $f(P) = 0$ et $P \in \mathcal{I}$. Le seul polynôme constant impair étant nul,

$$\text{Ker}(g) = \{0\}.$$

(c) Montrons que tout monôme impair appartient à $\text{Im}(g)$.

On vérifie que $g(-X) = X$.

On raisonne ensuite par récurrence pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{2n+1} \in \text{Im}(g).$$

- (d) Comme $\mathcal{I}$ admet pour base les monômes impairs, g est surjective. Étant injective, g est un automorphisme.

4. On introduit une suite (λ_k) et la forme linéaire

$$\varphi(P) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k P^{(k)}(0).$$

- (a) Cette somme est finie car P est un polynôme.

- (b) Si $P = \sum a_k X^k$, alors

$$P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

- (c) Il est immédiat que φ est linéaire.

- (d) On montre que

$$f(P)^{(k)}(0) = P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0).$$

On en déduit

$$\varphi(f(P)) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k (P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0)).$$

On vérifie ensuite que

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad \varphi(f(X^i)) = 0.$$

Cela conduit à la relation

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = \frac{\lambda_{i-2}}{i}.$$

On en déduit

$$\lambda_{2i+1} = 0, \quad \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}.$$

- (e) En choisissant $\lambda_0 = 1$, on obtient

$$\text{Im}(f) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] ; \sum_{k \geq 0} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right\}.$$