

Programme de colle 21 : du 16/03 au 20/03

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Loi de composition externe, interne. Espace vectoriel (définition, propriétés qui en découlent).
- Combinaison linéaire, sous-espace vectoriel.
- Définition et caractérisations d'un sous-espace vectoriel engendré par une partie.
- Intersection, somme de sev.
- Somme directe, sev supplémentaires.
- Morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
- Propriétés calculatoires.
- Structure de sev de $\mathcal{L}(E, F)$, composition, structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$.
- Noyau, image, caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité.
- Structure affine des solutions d'une équation linéaire.
- Projections, projecteurs, symétries.

Exercices abordés dans le TD D3 : 1, 3, 4, 5, 9, 11, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24.

Relations de comparaison

Tout est énoncé dans les deux cas : celui des suites et celui des fonctions.

- Définition (par le quotient) de α , $\sim$ et O .
- Caractérisation de $\sim$.
- Manipulations et règles de calcul.
- Utilisation pour le calcul de limites.
- Croissances comparées.
- Équivalents usuels.

Exercices abordés dans le TD B6 : 1, 2, 3, 6, 7.

Questions de cours

- Définitions équivalentes de $\text{Vect } A$ et justification (notamment entre ensemble des combinaisons linéaires à support fini d'éléments de A et plus petit (ou intersection des) sev contenant A).
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des espaces vectoriels.
- Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par son noyau.
- Deux sev F et G sont en somme directe si et seulement si tout élément $x \in F + G$ se décompose de manière unique $x = x_F + x_G$.
- Si p est un projecteur, alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.
- Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^2)$, $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im } u$. Éventuellement une CNS pour l'égalité si ça se passe bien (cf. exo D3.20).

Remarques

- Relations de comparaisons : le cours est terminé mais les exos sont encore frais et certaines corrections sont encore à venir en début de semaine.
- En algèbre linéaire encore plus qu'ailleurs : grande exigence de rigueur sur les méthodes et la nature des objets manipulés.
- On parle de famille génératrice car on parle de sev engendré, mais il n'est aucunement question de bases ni de dimension pour l'instant.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.