

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ et on considère l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0 \quad (E_n)$$

D'un côté...

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0, 1[$. On la note x_n .
2. Pour $n \geq 3$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$. Justifier que (x_n) est convergente.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$.
4. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et préciser la limite de x_n .
5. Montrer que $(1 + x_n^n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
6. En déduire un équivalent de $\left(x_n - \frac{1}{n}\right)$.

...de l'autre

7. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la note y_n .
8. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n}$.
9. En déduire qu'à partir d'un certain rang, $1 < y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
10. En déduire le comportement de la suite (y_n) .
11. Démontrer que $y_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.