

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être **encadrés**.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

A Étude de A

1. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(f) = xF_1(x) - F_2(x)$, avec

$$F_1 : x \mapsto \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad F_2 : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt.$$

Ainsi F_1 est une primitive de f sur \mathbb{R} . F_1 est dérivable et sa dérivée, f , est \mathcal{C}^∞ donc F_1 est \mathcal{C}^∞ . De même F_2 est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto xf(x)$ qui est \mathcal{C}^∞ . Donc F_2 est \mathcal{C}^∞ . Finalement, $A(f)$ est \mathcal{C}^∞ en tant que produit et combinaison linéaire de fonctions \mathcal{C}^∞ .

$$\boxed{A(f) \in E}.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} A(f)'(x) &= F_1(x) + xF_1'(x) + F_2'(x) \\ &= \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{A(f)'(x) = \int_0^x f(t) dt}.$$

On remarque que $A(f)'$ est une primitive de f sur \mathbb{R} . Ainsi, on a

$$\boxed{A(f)''(x) = f(x)}.$$

2. (a) On a déjà montré que $\forall f \in E$, $A(f) \in E$. Il reste à montrer que A est linéaire. Soit $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \int_0^x (x-t)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) dt \\ &= \int_0^x (\lambda_1(x-t)f_1(t) + \lambda_2(x-t)f_2(t)) dt \\ &= \lambda_1 \int_0^x (x-t)f_1(t) dt + \lambda_2 \int_0^x (x-t)f_2(t) dt \\ &= \lambda_1 A(f_1)(x) + \lambda_2 A(f_2)(x) \\ &= (\lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2))(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2)$. Donc A est linéaire.

$$\boxed{A \in \mathcal{L}(E)}.$$

(b) Soit $f \in \text{Ker } A$. On a $A(f) = 0_E$. On en déduit $A(f)'' = 0_E$. Or, d'après la question 2, $A(f)'' = f$. Ainsi $f = 0_E$.
Donc $\text{Ker } A = \{0_E\}$ et donc A est injective.

3. (a) On a montré à la question 2 que $\forall f \in E, A(f)'' = f$, cela signifie que $D_2 \circ A = \text{id } E$. On en déduit alors

$$p^2 = p \circ p = (A \circ D_2) \circ (A \circ D_2) = A \circ (D_2 \circ A) \circ D_2 = A \circ \text{id } E \circ D_2 = A \circ D_2 = p.$$

Donc

$$p \text{ est un projecteur.}$$

(b) Soit $f \in E$. Comme A est injectif, on a

$$p(f) = 0 \Leftrightarrow (A \circ D_2)(f) = 0 \Leftrightarrow A(f'') = 0 \Leftrightarrow f'' = 0.$$

Or les fonctions dont la dérivée seconde est nulle sont les fonctions affines. Donc

$$\text{Ker } p = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

4. (a) Soit $f \in E$. Comme f est continue, f admet une primitive v qui vérifie $v(0) = 0$. v est en particulier continue et admet donc une primitive u qui vérifie $u(0) = 0$. u est donc deux fois dérivable et $u'' = f$ qui est \mathcal{C}^∞ . Donc u est \mathcal{C}^∞ . On en déduit $u \in E$, $u(0) = 0$ et $u'(0) = v(0) = 0$. Donc

$$\exists u \in E \text{ tel que } u'' = f, u(0) = 0 \text{ et } u'(0) = 0.$$

(b) On montre les deux inclusions.

\subset Soit $h \in \text{Im } p$. Il existe alors $f \in E$ tel que $h = p(f) = (A \circ D_2)(f) = A(f'')$. Ainsi, $h \in \text{Im } A$.
Donc $\text{Im } p \subset \text{Im } A$.

\supset Soit $h \in \text{Im } A$. Il existe alors $f \in E$ tel que $h = A(f)$. D'après la question précédente, il existe $u \in E$ tel que $u'' = f$. On en déduit $h = A(f) = A(u'') = p(u)$. Ainsi $h \in \text{Im } p$. Donc $\text{Im } A \subset \text{Im } p$.

Donc

$$\text{Im } p = \text{Im } A.$$

5. (a) Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$p(f)(x) = A(f'')(x) = \int_0^x (x-t)f''(t) dt.$$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} p(f)(x) &= [(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x f'(t) dt \\ &= -xf'(0) + [f(t)]_0^x \end{aligned}$$

$$p(f)(x) = f(x) - f(0) - xf'(0).$$

- (b) D'après la question précédente, $\text{Im } A = \text{Im } p$ et comme p est un projecteur, $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id } E)$. Soit $f \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} f \in \text{Im } A &\Leftrightarrow f \in \text{Ker}(p - \text{id } E) \\ &\Leftrightarrow p(f) - f = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, p(f)(x) - f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(0) + xf'(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{Im } A = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}}.$$

B Étude des solutions de \mathcal{E}

6. (\mathcal{F}) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et g est continue. Le problème de Cauchy admet donc une unique solution h . Il reste à montrer que h est \mathcal{C}^∞ . Pour cela, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h est de classe \mathcal{C}^n .

Init. h est deux fois dérivable donc h est de classe \mathcal{C}^1 .

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons h de classe \mathcal{C}^n . On a $h'' = g + h$. Or g est \mathcal{C}^∞ , donc de classe \mathcal{C}^n . On en déduit que h'' est de classe \mathcal{C}^n , puis que h est de classe \mathcal{C}^{n+2} . En particulier, h est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Donc h est de classe \mathcal{C}^∞ , d'après le principe de récurrence.

$$\boxed{(\mathcal{F}) \text{ admet une unique solution } h \in E \text{ vérifiant } h(0) = h'(0) = 0}.$$

7. (a) Soit $u \in E$ tel que $u(0) = u'(0) = 0$. D'après les questions 5b et 4b, $u \in \text{Im } A = \text{Im } p$. Comme p est un projecteur, on a donc $A(u'') = p(u'') = u$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} u \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow u'' - u = g \\ &\Leftrightarrow u'' - A(u'') = g \end{aligned}$$

$$\boxed{u \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \Leftrightarrow u'' \text{ est solution de } (\mathcal{E})}.$$

- (b) **Analyse** Soit $f \in E$ une solution de (\mathcal{E}) . D'après la question 4a, il existe $u \in E$ tel que $u'' = f$ et $u'(0) = u(0) = 0$. D'après la question précédente, u est alors une solution de (\mathcal{F}) . Comme $u'(0) = u(0) = 0$, on en déduit que $u = h$. Par conséquent, $f = h''$.

Synthèse D'après les questions 6 et 7a, h'' est bien solution de (\mathcal{E}) .

Donc

$$\boxed{(\mathcal{E}) \text{ admet une unique solution } f \in E \text{ et on a } f = h'' = g + h}.$$

8. Commençons par résoudre (\mathcal{F}) . On résout l'équation différentielle

$$y'' - y = e^x.$$

- L'équation homogène (\mathcal{F}_0) associée à (\mathcal{F}) admet pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$. Cette équation admet deux racines réelles 1 et -1 . Ainsi, par théorème de cours, l'ensemble des solutions de (\mathcal{F}_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- On recherche ensuite une solution particulière de (\mathcal{F}) de la forme $y_0 : x \mapsto axe^x$, avec $a \in \mathbb{R}$, car 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = a(x+1)e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) = a(x+2)e^x.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) - y_0(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(x+2)e^x - axe^x = e^x \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $y_0 : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x$ est solution particulière de (\mathcal{F}) . L'ensemble des solutions de (\mathcal{F}) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Il reste à déterminer λ et μ à l'aide des conditions initiales. Soit $y : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x}$. On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = \frac{-1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{4} \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc

| |
|---|
| <p>L'unique solution h de $y'' - y = e^x$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ est</p> $h : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{xe^x - \text{sh } x}{2}.$ |
|---|

D'après les questions précédentes, l'unique solution f de (\mathcal{E}) est donc

| |
|--|
| $f : x \mapsto g(x) + h(x) = \frac{(2+x)e^x - \text{sh } x}{2}.$ |
|--|