

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

### Problème 1

On s'intéresse à la population de la planète Wagal, dont le fonctionnement est le suivant. À l'origine était un individu, appelé ancêtre, seul représentant de la génération 0. Ensuite, chaque individu de la génération  $n$  peut avoir de 0 à 3 enfants, formant la génération  $n + 1$ . En pratique un individu aura

- 3 enfants avec la probabilité  $1/8$ ,
- 2 enfants avec la probabilité  $3/8$ ,
- 1 enfant avec la probabilité  $3/8$ ,
- 0 enfant avec la probabilité  $1/8$ ,

et ce indépendamment des descendance des autres individus.

On suppose que la situation peut être modélisée par un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . On s'intéresse pour tout  $n \in \mathbb{N}$  à l'événement  $E_n$  : « la lignée s'éteint à la génération  $n$  », qui signifie qu'il n'y a aucun individu à la génération  $n$ . On note  $p_n = P(E_n)$ .

1. Calculer  $p_0$  et  $p_1$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'événement « l'ancêtre a eu  $k$  enfants ».

2. Préciser  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .

3. Supposons que l'ancêtre a eu 2 enfants. Sa descendance se divise ainsi en deux parties : les descendants de son premier enfant et ceux de son deuxième enfant. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note les événements :

$E_{1,n}$  : « il n'y a plus de descendants du côté de son premier enfant à la génération  $n$  » ;

$E_{2,n}$  : « il n'y a plus de descendants du côté de son deuxième enfant à la génération  $n$  ».

(a) Expliquer les égalités  $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n$ .

(b) En déduire que  $P_{A_2}(E_{n+1}) = p_n^2$ .

4. De même, donner  $P_{A_0}(E_{n+1})$ ,  $P_{A_1}(E_{n+1})$  et  $P_{A_3}(E_{n+1})$ .

5. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p_n + \frac{3}{8}p_n^2 + \frac{1}{8}p_n^3$  et discuter le cas  $n = 0$ .

6. Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$ .

(a) Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{1}{8}(x-1)(x^2 + ax + b).$$

On notera  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines de  $X^2 + aX + b$  avec  $\alpha < 0 < \beta < 1$ .

(b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p_n \leq \beta$ .

(c) Déterminer les variations de  $p_n$ .

(d) En déduire le comportement de  $p_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter.