

**Problème 1****D'un côté...**

1. On considère  $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynomiale. Une étude nous la donne strictement décroissante sur  $] -\infty, 1[$  et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

On a  $f_n(0) = 1 > 0$  et  $f_n(1) = 2 - n < 0$  pour  $n \geq 3$ , donc d'après le théorème de la bijection,  $(E_n)$  a une unique solution dans  $]0, 1[$ .

2. Soit  $n \geq 3$ . On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 = x_n(x_n^n - nx_n + 1) - x_n^2 = -x_n^2 < 0.$$

Ainsi  $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ , donc comme  $f_{n+1}$  est décroissante, on a  $x_{n+1} < x_n$ .

Donc  $(x_n)_{n \geq 3}$  est décroissante et minorée par 0, donc convergente.

3. Pour tout  $n \geq 3$ , on a  $x_n^n = nx_n - 1$ . Comme  $x_n \in ]0, 1[$  et que  $(x_n)$  est décroissante, elle converge vers  $\ell \geq 0$ .

Si  $\ell > 0$ , alors  $nx_n \rightarrow +\infty$ , donc  $x_n^n \rightarrow +\infty$ , contradiction. Donc  $\ell = 0$ , et ainsi  $x_n^n \rightarrow 0$ .

4. Soit  $n \geq 3$ . On pose  $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ , donc  $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 + x_n^n \rightarrow 1$ . Ainsi  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et en particulier  $x_n \rightarrow 0$ .

5. On écrit  $(1 + x_n^n)^n = \exp(n \ln(1 + x_n^n))$ .

Or  $\ln(1 + x_n^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n^n$  car  $x_n^n \rightarrow 0$ .

Donc  $n \ln(1 + x_n^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n^n = n(nx_n - 1)$ .

Or  $nx_n \rightarrow 1$  donc à pcr,  $nx_n \leq 2$  puis  $x_n \leq \frac{2}{n}$ , soit  $x_n^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$ .

Par croissances comparées,  $nx_n^n \leq n \left(\frac{2}{n}\right)^n \rightarrow 0$ .

Finalement  $n \ln(1 + x_n^n) \rightarrow 0$  et donc  $(1 + x_n^n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ .

6. Soit  $n \geq 3$ . On pose  $u_n = x_n - \frac{1}{n}$ , si bien que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . On remplace  $x_n = \frac{1}{n} + u_n$  dans l'équation.

$$\left(\frac{1}{n} + u_n\right)^n - n\left(\frac{1}{n} + u_n\right) + 1 = 0, \text{ i.e. } \left(\frac{1}{n} + u_n\right)^n - nu_n = 0.$$

Alors  $\frac{1}{n^n} e^{n \ln(1 + nu_n)} = nu_n$ .

Or  $nu_n = nx_n - 1 = x_n^n$  qui tend vers 0, donc  $n \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times nu_n$ .

De plus  $(x_n)$  étant décroissante,  $nu_n < x_3^n$  donc par croissances comparées,  $n \times nu_n < nx_3^n \rightarrow 0$ .

Finalement  $e^{n \ln(1 + nu_n)} \rightarrow 1$  et donc  $nu_n \sim \frac{1}{n^n}$ . Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n+1}}$ .

## ...de l'autre

7. Nouvelle application du théorème de la bijection.
8. Soit  $n \geq 3$ .

$$\ln \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \right) = n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \ln n$$

Or  $\ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$  car cette dernière quantité tend vers 0.

Donc  $n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{n}$ .

Ainsi  $\frac{\ln n}{n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  et donc  $\ln n = o \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$ .

Donc  $\ln \left( \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \right) \sim n \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ .

Finalement, par compositions de cette limite avec celle de  $\exp$  en  $+\infty$ ,  $\boxed{\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \rightarrow +\infty}$ .

9. On a  $f_n(1) < 0$  et

$$f_n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + 1.$$

Or  $n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n = o \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$  et  $1 = o \left( \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$ .

Donc  $f_n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$ .

Ainsi  $f_n \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow +\infty$  et est donc positive à pcr. Donc

$$\boxed{1 < y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ à partir d'un certain rang.}}$$

10. Par théorème d'encadrement,  $\boxed{y_n \rightarrow 1}$ .

11. On écrit  $y_n^n = ny_n - 1$ . Posons  $v_n = y_n - 1$  avec  $v_n \rightarrow 0$ .

Alors à l'aide de la fonction  $\ln$ , on a  $n \ln(1 + v_n) = \ln(n - 1 + nv_n)$ .

D'une part,  $n \ln(1 + v_n) \sim nv_n$  car  $v_n \rightarrow 0$ .

D'autre part,  $\ln(n - 1 + nv_n) = \ln(n) + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} + v_n \right) \sim \ln(n)$  car  $-\frac{1}{n} + v_n \rightarrow 0$ .

Finalement  $\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}$ .