

CHAPITRE D4

DIMENSION FINIE

Objectifs

- Décrire des objets d'algèbre linéaire avec un nombre limité d'informations :
 - une base pour un sev,
 - l'image d'une base pour une application linéaire.
- Utiliser la dimension pour caractériser des notions d'algèbre linéaire :
 - une base,
 - un isomorphisme,
 - des sev supplémentaires.

Dans tout ce chapitre, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, les x_i sont des vecteurs de E et les λ_i sont des scalaires de \mathbb{K} .

1 Familles libres, bases

Définition D4.1

On dit que la famille de vecteurs (x_1, \dots, x_n) est **liée** (ou que les vecteurs sont **linéairement dépendants**) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Une famille qui n'est pas liée est composée de vecteurs **linéairement indépendants**. On dit qu'elle est **libre**.

Remarque. Dire qu'une famille est liée revient à dire que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

**Proposition D4.2**

Une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre si et seulement si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Définition D4.3

On dit qu'une famille de vecteurs (x_1, \dots, x_n) est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E .

Théorème et définition D4.4

Une famille de vecteurs (x_1, \dots, x_n) est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des x_i :

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ forme la famille des **composantes** (ou **coordonnées**) de x dans la base (x_1, \dots, x_n) .

Définition D4.5

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon on dit qu'il est de **dimension infinie**.

Lemme D4.6

- (i) Étant donnée $\mathcal{L} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E et $x \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$, la famille (x_1, \dots, x_n, x) est aussi une famille libre de E .
- (ii) Étant donnée (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs de E et $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème D4.7 (de la base incomplète)

Soit $p, q, n \in \mathbb{N}^*$. Étant données dans E

- une famille libre $\mathcal{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$,
- une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$,

il existe une base \mathcal{B} de E de la forme

$$\mathcal{B} = (\ell_1, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots, \ell_n)$$

avec $\ell_{p+1}, \dots, \ell_n \in \mathcal{G}$.

Remarque. Ce théorème a trois conséquences très utiles.

- Théorème d'existence de base : tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie admet une base.
- Théorème de la base incomplète : étant donnée une famille libre dans un ev E de dimension finie, on peut la compléter en une base de E .
- Théorème de la base extraite : étant donnée une famille génératrice d'un ev E de dimension finie, on peut en extraire une base de E .

Théorème D4.8

Le cardinal d'une famille libre de E est toujours plus petit que le cardinal d'une famille génératrice.

Théorème et définition D4.9

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont même cardinal, appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Remarque. Par convention la dimension de l'espace $\{0\}$ est 0.

Théorème D4.10

Soit E un espace vectoriel de dimension n et \mathcal{F} une famille de p vecteurs de E .

- (i) Si \mathcal{F} est libre, alors $p \leq n$ et on a égalité si et seulement si \mathcal{F} est une base de E .
- (ii) Si \mathcal{F} est génératrice, alors $p \geq n$ et on a égalité si et seulement si \mathcal{F} est une base de E .



2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème D4.11

Soit F un sev de E . Alors

- (i) $\dim F \leq \dim E$,
- (ii) $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Théorème D4.12

Soit E un ev de dimension n . Soit F et G deux sev de E munis des bases respectives (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_q) . Alors on a équivalence entre

- (i) $E = F \oplus G$,
- (ii) $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E .

Remarque. Ce théorème a deux conséquences intéressantes.

- En termes de dimensions, si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.
- En dimension finie, tout sev admet un supplémentaire.

Théorème D4.13 (Formule de Grassmann)

Soit F et G deux sev de E . Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Remarque. Par conséquent, parmi les trois conditions suivantes, il suffit d'en établir deux pour montrer que $E = F \oplus G$:

- (1) $F \cap G = \{0_E\}$,
- (2) $F + G = E$,
- (3) $\dim F + \dim G = \dim E$.

3 Applications linéaires

3.1 Détermination d'une application linéaire

Théorème D4.14

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Étant donnée une famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de F , il existe une unique application $u : E \rightarrow F$ telle que pour tout i , $u(e_i) = f_i$. De plus,

- u est injective si et seulement si \mathcal{F} est libre,
- u est surjective si et seulement si \mathcal{F} est génératrice.

Corollaire D4.15

Avec les notations précédentes, F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Remarque. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre tout \mathbb{K} -ev de dimension n et \mathbb{K}^n .

Corollaire D4.16

Étant donnés E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Proposition D4.17

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux ev de même dimension finie. Alors on a équivalence entre

- (i) u est injective,
- (ii) u est surjective,
- (iii) u est un isomorphisme.

Proposition D4.18

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors on a équivalence entre

- (i) u est inversible à gauche,
- (ii) u est inversible à droite,
- (iii) u est inversible.

3.2 Rang d'une application linéaire**Définition D4.19 (Rang)**

- (i) Soit E un ev de dimension finie et \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . On appelle **rang** de \mathcal{F} la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.
- (ii) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de u la dimension de $\text{Im } u$.

Notations. On note ces quantités $\text{rg } \mathcal{F}$ et $\text{rg } u$.

**Proposition D4.20**

Étant donnée (e_1, \dots, e_n) une base de E , on a

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Proposition D4.21

Soit E, F, G trois ev de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

- (i) $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.
- (ii) Si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.
- (iii) Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.

Théorème D4.22 (du rang)

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u.$$

3.3 Hyperplans**Définition D4.23**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- (i) On appelle forme linéaire toute application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K}$.
- (ii) On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on appelle **espace vectoriel dual de E** l'ensemble des formes linéaires sur E .

Définition D4.24

Soit E un \mathbb{K} -ev. On appelle **hyperplan** de E tout sev de E qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Théorème D4.25 (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un sev de E . Alors on a équivalence entre

- (i) H est un hyperplan de E ,
- (ii) il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.

Théorème D4.26 (Caractérisation des hyperplans en dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et H un sev de E . Alors on a équivalence entre

- (i) H est un hyperplan de E ,
- (ii) $\dim(H) = n - 1$.

Théorème D4.27

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et H un hyperplan de E . Alors

- (i) H admet une équation cartésienne dans la base \mathcal{E} , *i.e.* il existe $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que pour tout $x \in E$ de composantes $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans la base \mathcal{E} ,

$$x \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

- (ii) Deux équations cartésiennes de H dans une même base sont proportionnelles. Autrement dit : soit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$ deux équations cartésiennes de H dans la base \mathcal{E} (avec les notations évidentes). Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times, \forall 1 \leq i \leq n, b_i = \lambda a_i$.

Théorème D4.28

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Soit $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'hyperplans de E . Alors $\dim \left(\bigcap_{i=1}^p H_i \right) \geq n - p$.
- (ii) Soit F un sev de E de dimension $n - p$ avec $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors il existe $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille d'hyperplans de E telle que $F = \bigcap_{i=1}^p H_i$.

**Méthodes**

- Vérifier qu'une famille de vecteurs est une base.
- Montrer qu'une application linéaire est bijective en utilisant l'égalité des dimensions.
- Déterminer un supplémentaire d'un sev.
- Montrer que deux sev sont supplémentaires
 - par caractérisation par les bases,
 - par caractérisation par la dimension.
- Déterminer le noyau ou l'image d'une application linéaire, connaissant l'autre, à l'aide du théorème du rang.
- Déterminer une application linéaire
 - par l'image des vecteurs d'une base,
 - par sa restriction sur des sev supplémentaires.