TD D4. Dimension finie

1 Sev, bases

Exercice D4.1

Déterminer une base et la dimension des sev suivants.

1. Des polynômes.
   (a) $F_1 = \mathbb{K}_2[X]$,
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(1) = 0\}$,
   (c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
2. Des fonctions.
   (a) $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' - 2xf = 0\}$,
   (b) $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$,
3. Des suites.
   (a) l'ensemble F_4 des suites arithmétiques.
   (b) $F_5 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$
   (c) $F_6 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$
4. Des matrices.
   (a) l'ensemble F_9 des matrices 2×2 diagonales,
   (b) l'ensemble F_{10} des matrices 2×2 symétriques,
   (c) l'ensemble F_{11} des matrices 2×2 de trace nulle.

Exercice D4.2 ✪

Montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $\big((X-1)^2,\ (X-1)(X+1),\ (X+1)^2\big)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. $\left(x \mapsto e^x,\ x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto e^{x^2}\right)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. $\big((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice D4.3

Donner une base et la dimension des sev suivants.

1. $F_1 = \{(4t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$.
3. $F_3 = \{(4t + s, -t + 3s, t + s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
5. $F_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$.
6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
7. $F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0\}$.
8. $F_8 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0 \text{ et } y + z = 1\}$.

Exercice D4.4 ✪

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $a = (0, 0, 1, 0), b = (1, 1, 0, -1), c = (1, 0, 1, 0), d = (0, -1, 1, 0)$ et $e = (1, 1, 1, 1)$. On définit $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d, e)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice D4.5 ✪✪

Montrer que les familles suivantes sont libres

1. $\left(x^k \cos(x))_{k\in\mathbb{N}}\right)$,
2. $\left(\sin^k x)_{k\in\mathbb{N}}\right)$,
3. $(x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

Exercice D4.6 ✿

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sev suivants.

1. $F_1 = \text{Vect}\left((1,1,0),(2,1,1)\right)$,
2. $F_2 = \text{Vect}\left((-1,1,0),(2,0,1),(1,1,1)\right)$,
3. $F_3 = \left\{(x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}$.

Exercice D4.7 ✿✿

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, étant donnée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$ et $F = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \widetilde{A}\}$. Montrer que F est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Exercice D4.8 ✿

Montrer que les sev suivants sont supplémentaires.

1. $F = \text{Vect}((1,1,1))$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$ dans $\mathbb{R}^3$,
2. $F = \text{Vect}\left((1,0,0,1),(0,1,1,0)\right)$ et $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } y-z+t=0\right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. $F = \mathbb{R}_0[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice D4.9 ✿✿

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{I}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.

1. Montrer que $\mathcal{I}(A)$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et en déterminer une base.
2. Soit $a = \deg(A)$ et $n \geqslant a$ un entier. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{I}(A) \cap \mathbb{K}_n[X]$ et donner un supplémentaire de $\mathcal{I}(A)$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice D4.10 ✿✿✿

Soit F et G deux sev d'un ev E de dimension finie. Montrer que $\dim F = \dim G$ si et seulement si F et G ont un supplémentaire commun dans E.

Exercice D4.11 ✿✿✿

Soit E un ev de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sev de E. Montrer que l'application dim est l'unique application $d : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ qui vérifie

- $\forall F, G \in \mathcal{S},\ (F \cap G = \{0\} \Rightarrow d(F+G) = d(F) + d(G))$,
- $d(E) = n$.

2 Applications linéaires

Exercice D4.12

Déterminer une base du noyau et (si c'est possible) de l'image des applications linéaires suivantes.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+z) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f + f' \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^\intercal \end{array}$

Exercice D4.13

Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0) = (0,1)$, $f(1,1,0) = (0,1)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Exprimer $f(u)$ pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice D4.14

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer que f induit un endomorphisme f_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.
4. En déduire l'image de f.

Exercice D4.15

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f).$$

Exercice D4.16

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice D4.17

Soit E un ev de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = \operatorname{Id}_E$. Montrer que u est inversible et que $u^{-1} = v$.

Exercice D4.18

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^a st$ et f un endomorphisme nilpotent de E. Notons p son indice de nilpotence.

1. Soit $x \notin \operatorname{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que $(f_i(x))_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Exercice D4.19

Soit H_1, H_2 deux hyperplans distincts d'un ev E de dimension finie $n \geqslant 2$. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice D4.20

Soit E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout sev F de E, $u(F) \subset F$. Que peut-on dire de u ?