

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1 Des carrés magiques

Dans tout le problème, les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est notée

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9 et sa base canonique, notée \mathcal{B} , est formée des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + lE_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9.$$

Étant donnée une telle matrice, on étudie la somme des coefficients d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. On définit ainsi huit nombres :

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c, & s_2 &= k + l + m, & s_3 &= r + s + t, \\ s_4 &= a + k + r, & s_5 &= b + l + s, & s_6 &= c + m + t, \\ s_7 &= a + l + t, & s_8 &= r + l + c. \end{aligned}$$

Notons que s_7 s'appelle la trace de la matrice.

On appelle

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note :

S l'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

A l'ensemble des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

V le sous-espace Vect J , engendré par J ,

T l'ensemble des matrices de trace nulle (*i.e.* pour lesquelles s_7 est nul).

Généralités

1. Donner les dimensions et des bases de S et A . Justifier que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
2. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $S \cap T$ et V sont deux sous-espaces supplémentaires de S et donner leurs dimensions respectives.

Une application linéaire

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^8 \\ M &\mapsto (s_1, \dots, s_8) \end{aligned}$$

4. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^8 .
5. Écrire la matrice de φ , de la base \mathcal{B} pour l'espace de départ, dans la base canonique de \mathbb{R}^8 .
6. Montrer que le rang de cette matrice est 7. (*On pourra par exemple exprimer une ligne comme combinaison des précédentes puis montrer que les autres sont libres, mais ce n'est pas la seule méthode possible.*)
7. En déduire la dimension de $\text{Ker } \varphi$.

Matrices magiques

On s'intéresse maintenant à l'ensemble \mathcal{M} des matrices *magiques*, c'est-à-dire pour lesquelles les huit nombres s_1, \dots, s_8 sont tous égaux à un même nombre s , appelé somme de la matrice magique.

8. Montrer que \mathcal{M} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\mathcal{M} \cap T$ et V sont des sous-espaces supplémentaires de \mathcal{M} .
10. Montrer que $\mathcal{M} \cap T = \text{Ker } \varphi$. En déduire la dimension de \mathcal{M} .
11. Donner une matrice de $\mathcal{M} \cap T \cap S$ et une matrice de $\mathcal{M} \cap T \cap A$.
12. En déduire une base de \mathcal{M} .

Problème 2

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

Indication : calculer $\int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n}$ en utilisant les méthodes vues en cours, puis passez à la limite.

(b) Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

*Indication : attention ! α est un **nombre complexe non réel** ! Donc pas de \ln hâtif pour le calcul de primitive. Écrivez $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer ensuite séparément les parties réelles et imaginaires de $\int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha}$ puis passez à la limite. Vous devriez trouver une limite égale à $i\pi$ si $b > 0$ et autre chose si $b < 0$...*

2. Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle réel et telle que $\deg R \leq -2$. On note \mathcal{P} l'ensemble des pôles de R et \mathcal{P}^+ l'ensemble des pôles de R de partie imaginaire strictement positive.

- (a) Écrire la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$ (On ne demande pas de calculer les coefficients de chaque élément simple).
- (b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, on appelle résidu de R en α , et on note $\text{Res}_\alpha(R)$ le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de R sur \mathbb{C} . Montrer que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \text{Res}_\alpha(R) = 0.$$

Indication : calculez de deux manières $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x)$.

- (c) Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x R(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et établir la formule des résidus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \text{Res}_\alpha(R).$$

3. Application. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. En utilisant la formule des résidus, calculer

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t^{2m}}{t^{2n} + 1} dt.$$

Indication : Vérifier qu'on peut appliquer la formule des résidus, puis déterminer tous les pôles de $R(X) = \frac{X^{2m}}{X^{2n} + 1}$ de partie imaginaire strictement positive et leurs résidus. Simplifier ensuite le plus possible le résultat.