Chapitre B7

Développements limités

Objectifs

- Notion de développement limité d'une fonction.
- Description locale de l'allure d'une fonction.

1 Formules de Taylor

Théorème B7.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelé **polynôme de Taylor** de f de degré n et la fonction R_n définie par

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée **reste intégral**.

Théorème B7.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Avec les notations ci-dessus et en appelant M_{n+1} un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$, on a

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Théorème B7.3 (Formule de Taylor-Young)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, on ait

$$f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

2 Développements limités

2.1 Généralités

Définition B7.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à I. On dit que f admet un **développement limité en** a **à l'ordre** n si l'on peut écrire

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec

- P un polynôme tel que $\deg P \leqslant n$, appelé **partie régulière** ou **principale** du développement,
- $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. La fonction $x \mapsto (x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelée **reste** du développement limité de f.

Remarques.

- On se limite dans toute la suite au cas $a = 0$. En effet, si $a \in \mathbb{R}^*$ on peut s'y ramener par le changement de variable $x \to x - a$. Et si $a = \pm\infty$, il suffit de poser $u = \dfrac{1}{x}$.
- Le théorème de Taylor-Young garantit l'existence d'un DL à l'ordre n dès que la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition B7.5 (Unicité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL à l'ordre n. Alors la partie principale de ce DL est unique. C'est-à-dire que s'il existe des polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n tels que

$$\forall x \in I,\ f(x) = P_1(x) + o(x^n) = P_2(x) + o(x^n),$$

alors $P_1 = P_2$.

Corollaire B7.6

- Si f admet un DL à l'ordre n en 0, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p en 0.
- Si f est paire (respectivement impaire) et admet un DL en 0, alors ce DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

2.2 Opérations

Proposition B7.7 (Somme, produit)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ admettent un DL à l'ordre n en 0 et

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \tag{B7.1}$$

$$(f \times g)(x) = S(x) + o(x^n), \tag{B7.2}$$

où S est égal au produit $P \times Q$ privé de tous ses termes de degré (strictement) supérieur à n.

Proposition B7.8 (Composition)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

- ➢ f admet un DL à l'ordre n en 0 : $f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$,
- ➢ $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- ➢ g admet un DL à l'ordre n en 0 : $g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en 0 dont la partie principale est constituée des termes de degré au plus n dans le polynôme $Q \circ P$.

Proposition B7.9 (Primitive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose que

- f' admet un DL à l'ordre n en 0 : $f'(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$,
- $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$.

Alors f admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$f(x) = \ell + Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^{n+1}),$$

avec $Q' = P$ et $Q(0) = 0$.

Remarque. Pas de résultat général sur la dérivée !

3 Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

Méthodes

- Utiliser les formules de Taylor pour
  - ➢ obtenir des inégalités,
  - ➢ obtenir un DL.
- Écrire le DL d'une fonction simple.