

CHAPITRE B8

SÉRIES NUMÉRIQUES

Objectifs

- Problèmes de convergence d'une série.
- Séries de référence.
- Techniques de comparaison.

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1 Convergence d'une série

Définition B8.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Le nombre S_n est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série.

Notations. On note cette série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Définition B8.2

- On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles admet une limite finie $S \in \mathbb{K}$. On appelle alors **somme de la série** ce nombre S .
- Lorsque la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série est **divergente**.

Notation. Dans le cas d'une série convergente, on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N.$$



Remarque. Attention à ne pas confondre les notations. Malgré l'immuable présence du signe sigma, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ désigne la série de terme général u_n ; c'est une suite et cela n'a aucun rapport avec sa somme, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui, lorsque la série converge, est un nombre fini et avec lequel on ne peut écrire des calculs qu'après avoir établi son existence.

Remarque. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. On note $\sum_{n \geq n_1} u_n$ la suite $\left(\sum_{k=n_1}^n u_k \right)_{n \geq n_1}$. Deux séries $\sum_{n \geq n_1} u_n$ et $\sum_{n \geq n_2} u_n$ ont même nature.

Définition B8.3

Étant donnée $\sum u_n$ une série qui converge vers S , le nombre

$$R_n = S - S_n = S - \sum_{k=0}^n u_k$$

est appelé **reste** à l'ordre n de la série $\sum u_n$. On écrit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on a $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2 Séries de référence

Théorème B8.4 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition B8.5

Si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque. Bien évidemment la réciproque est fausse.

Définition B8.6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement** (ou **trivialement**).

Proposition B8.7 (Série télescopique)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

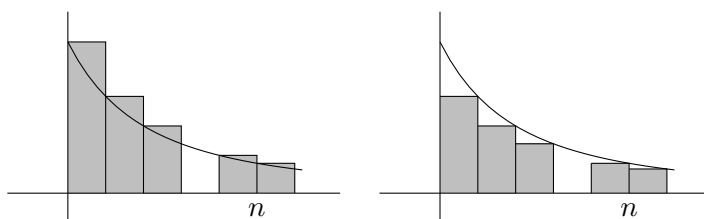
Théorème B8.8 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Proposition B8.9 (Dérivées d'une série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Dans le cas où il est difficile de calculer la somme partielle, on peut, en présence de séries réelles positives de terme général décroissant, utiliser nos connaissances sur les intégrales grâce au critère de comparaison suivant.

**Proposition B8.10 (Comparaison entre série et intégrale)**

Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante et $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \int_1^n f \text{ admet une limite finie.}$$



3 Propriétés

Proposition B8.11 (Linéarité)

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont des séries convergentes ;
- et les sommes suivent la propriété de linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque. En résumé, l'ensemble des séries convergentes (muni de l'addition des suites et de leur multiplication par un scalaire) forme un \mathbb{R} -espace vectoriel ; et l'application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

4 Étude de convergence

4.1 Cas positif

Théorème B8.12 (Comparaison)

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs.

- Si on a $u_n \leq v_n$ à pcr ou $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$, alors
 - $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge,
 - $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- Si on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4.2 Cas général

Définition B8.13

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition B8.14

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque. Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**. Par exemple $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente mais elle converge (voir séries alternées ci-après) et on peut même calculer sa somme : $\ln(2)$ (conséquence de l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange).

Proposition B8.15 (Séries à valeurs complexes)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $(\sum \operatorname{Re} u_n)$ et $(\sum \operatorname{Im} u_n)$ convergent. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n.$$

Théorème B8.16 (Critère spécial des séries alternées)

Soit $u_n = (-1)^n f(n)$ avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est positive,
- f est décroissante,
- $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Alors :

- $\sum u_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est comprise entre S_n et S_{n+1} ;
- les restes vérifient pour tout $n \geq 0$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Méthodes

- Établir la convergence d'une série
 - en reconnaissant une série de référence,
 - en la comparant à une série à termes positifs,
 - par le calcul.
- Calculer une somme de série
 - par télescopage,
 - en faisant apparaître des séries usuelles,
 - par passage à la limite.