

## Sol B6. Comparaisons locales

### Solution B6.6

(g)  $\sin(1/n) \rightarrow 0$  donc  $\sin(1/n) = o(1)$  donc  $\sin(1/n) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ . Et  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$  donc  $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

$$\text{Donc } \frac{\sin(1/n) + 1}{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2.$$

(h) Tout d'abord

$$\begin{aligned} e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n}} &= \left( e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \right) - \left( \cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) - 1 \right) \\ &= \left( e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) - 1}{e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1} \right). \end{aligned}$$

Or  $e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$  car  $\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Et  $\cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt[4]{n}}$  car  $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $\frac{\cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) - 1}{e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $\left( 1 - \frac{\cos \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) - 1}{e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Finalement  $e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\sin \sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$  comme vu précédemment.

(i)  $\ln \left( \frac{n^2 - n + 5}{n^2 + n - 3} \right) = \ln \left( \frac{n^2 + n - 3 - 2n + 8}{n^2 + n - 3} \right) = \ln \left( 1 + \frac{-2n + 8}{n^2 + n - 3} \right)$ . Or  $\frac{-2n + 8}{n^2 + n - 3} \rightarrow 0$ .

$$\text{Donc } \ln \left( \frac{n^2 - n + 5}{n^2 + n - 3} \right) \sim \frac{-2n + 8}{n^2 + n - 3} \sim \frac{-2}{n}.$$

(j)  $\ln \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) \rightarrow 0$  donc  $\tan \left( \ln \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ .

$$\ln \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) = \ln \left( 1 + \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) - 1 \right) \right) \text{ et } \cos \left( \frac{1}{n} \right) - 1 \rightarrow 0.$$

$$\text{Donc } \ln \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right) \sim \cos \left( \frac{1}{n} \right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

### Solution B6.8

Soit  $\alpha > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

6.  $x^2 - x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$  donc  $\ln(1 + x^2 - x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x^2 - x) = x(x - 1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$  car  $x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ .

Au dénominateur,  $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$  et  $x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3$  donc  $x^2(x - 1)(x + 2) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 3(x - 1)$ .

Finalement  $\frac{\ln(1 + x^2 - x)}{x^2(x - 1)(x + 2)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{3}$ , autrement dit  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + x^2 - x)}{x^2(x - 1)(x + 2)} = \frac{1}{3}$ .



7.

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha - \alpha^x}{x^x - \alpha^\alpha} &= \frac{e^{\alpha \ln x} - e^{x \ln \alpha}}{e^{x \ln x} - e^{\alpha \ln \alpha}} \\ &= \frac{e^{\alpha \ln x}}{\underbrace{e^{\alpha \ln \alpha}}_{\xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 1}} \frac{1 - e^{x \ln(\alpha) - \alpha \ln(x)}}{e^{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)} - 1}. \end{aligned}$$

Or  $x \ln(\alpha) - \alpha \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 1$  et  $x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 1$ . Donc

$$\begin{aligned} \frac{x^\alpha - \alpha^x}{x^x - \alpha^\alpha} &\underset{x \rightarrow \alpha}{\sim} \frac{x \ln(\alpha) - \alpha \ln(x)}{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)} \\ &= \frac{x \ln(\alpha) - \alpha \ln(\alpha) + \alpha \ln(\alpha) - \alpha \ln(x)}{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)} \\ &= \frac{(x - \alpha) \left( \ln(\alpha) + \alpha \frac{\ln(\alpha) - \ln(x)}{x - \alpha} \right)}{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)}. \end{aligned}$$

Deux taux d'accroissements : d'une part  $\frac{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)}{x - \alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{1 + \ln \alpha} + \ln \alpha$  donc  $\frac{x - \alpha}{x \ln(x) - \alpha \ln(\alpha)} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{1 + \ln \alpha}$  ;

d'autre part  $\frac{\ln(\alpha) - \ln(x)}{x - \alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{\alpha}$ .

Finalement  $\frac{x^\alpha - \alpha^x}{x^x - \alpha^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{1 + \ln \alpha} (\ln(\alpha) - 1) = \frac{1 - \ln \alpha}{1 + \ln \alpha}$ .

8.  $\left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{\lambda x} = \exp \left( \lambda x \ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right) \right)$ .

Or  $\ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{x+2} \right) \sim -\frac{1}{x+2}$ . Donc  $\lambda x \ln \left( \frac{x+1}{x+2} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\lambda x}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\lambda$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^{\lambda x} = e^{-\lambda}$ .