

TD B7. Développements limités

1 Développements limités

Exercice B7.1

1. Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes.

- | | |
|---|--|
| (a) $x \mapsto \sin x \cos x$ à l'ordre 5, | (f) $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ à l'ordre 3, |
| (b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3, | (g) $x \mapsto (1+2x)^x$ à l'ordre 5, |
| (c) $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4, | (h) $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ à l'ordre 3, |
| (d) $x^2\sqrt{1+2x}$ à l'ordre 3, | (i) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3, |
| (e) $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x-1}$ à l'ordre 3, | (j) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$ à l'ordre 3. |

2. Déterminer un équivalent en 0 de

- (a) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$, (b) $x \mapsto e^{x+1} - (1+x)^e - (e-1)$, (c) $x \mapsto \sqrt{3+\cos x} - 2$.

Exercice B7.2

Déterminer les développements limités en x_0 des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $x \mapsto \sin x$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3, | 6. $x \mapsto \ln(\sin x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2. |
| 2. $x \mapsto e^x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4. | 7. $x \mapsto \sin x \cos(3x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre 2. |
| 3. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4. | 8. $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ en $x_0 = 2$ à l'ordre 2. |
| 4. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 3. | |
| 5. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en $x_0 = -2$ à l'ordre 3. | |

Exercice B7.3

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

- Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- Après avoir justifié son existence, déterminer le DL de f^{-1} à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.4

Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^x \ln(1+x)$. En déduire la position de sa courbe représentative par rapport à sa tangente à l'origine.

**Exercice B7.5** ⚙️⚙️

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et déterminer leur position relative à celle-ci au voisinage de $+\infty$.

1. $x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,
2. $x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$,
3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$.

Exercice B7.6 ⚙️⚙️

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice B7.7 ⚙️⚙️

Calculer un développement asymptotique de chacune des fonctions suivantes à la précision demandée et au voisinage du point indiqué.

1. $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ en 0, à deux termes.
2. $x \mapsto x^x$ en 0 à la précision $(x \ln x)^2$.
3. $x \mapsto \sqrt{x^4 + x + 1} - x\sqrt{x^2 + 1}$ en $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x^2}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$ en 0 à la précision x^2 .

Exercice B7.8 ⚙️⚙️⚙️

Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x \cos^n(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I$ tel que f_n atteigne son maximum sur I en x_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
3. Montrer que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
4. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f_n(x_n)$.
5. En déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n .

2 Formules de Taylor

Exercice B7.9 ⚙️

Montrer que $\left|e - \frac{163}{60}\right| \leq \frac{1}{240}$.

Exercice B7.10 ⚙️

À l'aide de la formule de Taylor reste intégral, démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice B7.11  

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f et préciser $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ainsi que $f(0)$.
3. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer que

$$\forall u \in [-1, 1], |e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3u^2}{2}.$$

4. En déduire que $\forall h \in [-1, 1], \forall t \in [0, 1], |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq h^2 \frac{3t^2}{2} e^{-xt}$ puis que

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{3h^2}{2} \int_0^1 \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

5. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^1 -\frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt$.