TD B8. Séries numériques

Exercice B8.1 ⚙

Donner la nature de chacune des séries de termes généraux

1. pour ces premiers exemples, on cherchera aussi à calculer la somme en cas de convergence

   (a) $\dfrac{1}{3^n}$,

   (b) $\dfrac{2}{n^2-1}$,

   (c) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$,

   (d) $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(n^{\ln(n+1)}\right)}$,

2. (e) $\dfrac{1}{n^2+1}$,

   (f) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

   (g) $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$,

   (h) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}$,

   (i) $\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$,

   (j) $(-1)^n/n^2$,

   (k) $\begin{cases} 1/n^2 \text{ si } n \text{ pair,} \\ 0 \text{ sinon ;} \end{cases}$

   (l) $\dfrac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}$,

   (m) $\dfrac{\cos(n\pi)}{(n\pi)}$,

   (n) $\dfrac{3}{\sqrt{n}-1}$,

   (o) $n\sin(1/n)$,

   (p) $\dfrac{\sin(1/n)}{n}$,

   (q) $(-1)^n n^2$,

   (r) $\begin{cases} 1/\ln(n) \text{ si } n \text{ pair,} \\ 1/\ln(1/n) \text{ sinon ;} \end{cases}$

   (s) $\ln(n)/n$,

   (t) $\dfrac{1}{n\sin(n^2)}$;

3. ⚙⚙ le cas échéant, on discutera suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

   (u) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$,

   (v) $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$,

   (w) $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}-1\right)^n$,

   (x) $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$,

   (y) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\alpha\sin(1/n)$,

   (z) $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exercice B8.2 ⚙

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Que dire de la nature des séries de termes généraux

1. $e^{u_n}-1$,
2. u_n^2,
3. $\ln(1+u_n)$.

Exercice B8.3 ⚙

1. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge et donner un équivalent de sa somme partielle.
2. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge et donner un équivalent de son reste à l'ordre n.

Exercice B8.4 ⚙⚙

Déterminer, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$, la nature et, en cas de convergence, la somme de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}\right).$$

Exercice B8.5 ✿

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\ell > 1$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge si $0 \leqslant \ell < 1$.
3. Donner deux exemples de séries pour lesquelles $\ell = 1$ et qui on des natures différentes.

Exercice B8.6 ✿✿ *Un produit infini*

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+x}{k^2+y}$. Montrer que (P_n) converge vers une limite strictement positive.

Exercice B8.7 ✿✿ *Transformation d'Abel*

Soit $(a_n)_n$ une suite de termes positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (S_n) une suite bornée.

1. Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
2. En déduire que $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ la convergence de $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$.

Exercice B8.8 ✿✿ *Série géométrique dérivée*

Soit $x \in [0,1[$. Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} \binom{n}{p} x^n$.

1. Montrer que cette série converge, on note S_p sa somme.
2. Montrer que $x(S_p + S_{p+1}) = S_{p+1}$.
3. Exprimer S_p en fonction de p et x.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace l'hypothèse $x \in [0,1[$ par $x \in]-1,1[$?

Exercice B8.9 ✿✿✿ *(Théorème de réarrangement de Riemann)*

1. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et que sa somme est celle de $\sum u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente). Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers α.