

TD D5. Matrices et applications linéaires

Exercice D5.1

Pour chacune des applications suivantes, vérifier que u est linéaire, calculer sa matrice dans les bases canoniques des espaces considérés, calculer son rang et u^{-1} le cas échéant puis à l'aide de la matrice, calculer l'image du vecteur V donné.

1. $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $V = (0, 1, -1)$,
 $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y - 3z)$
2. $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ et $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$,
 $P \mapsto XP'(X) - P(X)$
3. $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $V = X^2 - X + 3$,
 $P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$
4. $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 $M \mapsto EM$

Exercice D5.2

Déterminer le noyau et l'image de

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Ker B et Im B sont supplémentaires),
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (on montrera aussi que
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice D5.3

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension 3, \mathcal{B} une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, notée A .

1. Déterminer $F = \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et justifier que $E = F \oplus G$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G . Déterminer sa matrice P dans la base \mathcal{B} .
3. Soit q la projection sur G parallèlement à F . Déterminer $p + q$, pq , qp ainsi que la matrice Q de q dans la base \mathcal{B} .
4. Montrer que $A = 2P + Q$ et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D5.4

On considère \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2)$. On définit l'endomorphisme f par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + 2e_2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base e .
2. Soit $v = xe_1 + ye_2$. Calculer dans la base e les composantes x' et y' de $f(v)$.
3. On pose $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E .
4. Déterminer P_e^ε et P_ε^e .
5. En déduire la matrice B de f dans la base ε .

**Exercice D5.5** ⚙️

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = 2X^2 - X$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = X^2 - X + 2$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base \mathcal{B}' ?
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

$$P \mapsto XP'$$

Exercice D5.6 ⚙️⚙️

Soient E un ev de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D5.7 ⚙️

Montrer que les matrices de chacune des listes suivantes sont semblables.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.8 ⚙️⚙️

Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (on note p son indice de nilpotence) et u l'endomorphisme de \mathbb{K}^4 canoniquement associé à N .

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{K}^4$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Montrer que la famille $(u^i(a))_{1 \leq i \leq p-1}$ est libre.

3. (a) Montrer que si $p = 4$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Montrer que si $p = 3$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (c) Montrer que si $p = 2$, alors N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice D5.9 ⚙️⚙️

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Pour quelles valeurs de λ le noyau de $A - \lambda I_3$ est-il non réduit à $\{0\}$?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et écrire les matrices de passage correspondantes.

Exercice D5.10 ⚙️⚙️

Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

$$\varphi : P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$$

est diagonalisable, *i.e.* qu'il peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie.

Exercice D5.11 ⚙️⚙️⚙️

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.
 $M \mapsto \text{tr}(AM)$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, φ_A est une forme linéaire.
2. Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$