

Problème 1

On s'intéresse à la population de la planète Wagal, dont le fonctionnement est le suivant. À l'origine était un individu, appelé ancêtre, seul représentant de la génération 0. Ensuite, chaque individu de la génération n peut avoir de 0 à 3 enfants, formant la génération $n + 1$. En pratique un individu aura

- 3 enfants avec la probabilité $1/8$,
- 2 enfants avec la probabilité $3/8$,
- 1 enfant avec la probabilité $3/8$,
- 0 enfant avec la probabilité $1/8$,

et ce indépendamment des descendance des autres individus.

On suppose que la situation peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On s'intéresse pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'événement E_n : « la lignée s'éteint à la génération n », qui signifie qu'il n'y a aucun individu à la génération n . On note $p_n = P(E_n)$.

1. La génération 0 n'est pas éteinte (il y a l'ancêtre), donc $p_0 = 0$.

Les individus de la génération 1 sont exactement les enfants de l'ancêtre. Donc E_1 est réalisé si l'ancêtre n'a pas d'enfant (A_0 avec les notations de la suite). Donc $p_1 = \frac{1}{8}$ d'après l'énoncé.

Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on note A_k l'événement « l'ancêtre a eu k enfants ».

2. L'énoncé nous donne aussi les autres probabilités : $P(A_0) = \frac{1}{8}$, $P(A_1) = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{3}{8}$ et $P(A_3) = \frac{1}{8}$.

3. Supposons que l'ancêtre a eu 2 enfants. Sa descendance se divise ainsi en deux parties : les descendants de son premier enfant et ceux de son deuxième enfant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note les événements :

$E_{1,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son premier enfant à la génération n » ;

$E_{2,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son deuxième enfant à la génération n ».

- (a) L'arbre qui représente la descendance du premier enfant de l'ancêtre est exactement le même que celui qu'étudie le problème en faisant jouer à ce premier enfant le rôle d'ancêtre. Ainsi $E_{1,n+1}$ se produit avec la même probabilité que l'extinction de la lignée en n générations à partir d'un individu seul donné.

Ce raisonnement vaut bien sûr également pour le côté du deuxième enfant. Ainsi $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = P(E_n)$, soit $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n$.

- (b) L'extinction de la lignée à la génération $n + 1$ suppose l'extinction des deux descendance examinées : celle du premier enfant et celle du deuxième enfant de l'ancêtre, à échéance de la génération $n + 1$, soit $P_{A_2}(E_{n+1}) = P_{A_2}(E_{1,n+1} \cap E_{2,n+1})$.

Par indépendance, $P_{A_2}(E_{n+1}) = P_{A_2}(E_{1,n+1}) \times P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n^2$.

4. De même, $P_{A_0}(E_{n+1}) = 1$, $P_{A_1}(E_{n+1}) = p_n$ et $P_{A_3}(E_{n+1}) = p_n^3$, toujours par indépendance (notamment pour cette dernière probabilité) des descendance de chaque enfant de l'ancêtre.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme A_0, A_1, A_2 et A_3 forment un s.c.e, d'après la formule des probabilités totales, on

a $P(E_{n+1}) = \sum_{i=0}^3 P(A_i)P_{A_i}(E_{n+1})$, ce qui donne d'après les questions précédentes :

$$p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p_n + \frac{3}{8}p_n^2 + \frac{1}{8}p_n^3.$$

D'après la première question, on constate que cette formule reste vraie pour $n = 0$.

6. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$.

(a) On obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \frac{1}{8}(x-1)(x^2 + 4x - 1)$.

On notera α et β les deux racines de $X^2 + aX + b$ avec $\alpha < 0 < \beta < 1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$ (si la lignée s'éteint, elle est éteinte à toutes les générations suivantes).

Donc $p_n \leq p_{n+1}$, i.e. $0 \leq p_{n+1} - p_n = f(p_n) - p_n$.

Or $f(x) - x$ est positif sur $[\alpha, \beta]$ puis négatif sur $[\beta, 1]$ d'après la factorisation ci-dessus.

Donc p_n (qui est dans $[0, 1]$ a priori) est dans $[0, \beta]$.

(c) Sur $[0, \beta]$, $f(x) - x$ est positif. Comme $p_n \in [0, \beta]$, $p_{n+1} - p_n = f(p_n) - p_n \geq 0$ donc (p_n) est croissante.

(d) (p_n) est croissante et majorée, donc (p_n) converge. La seule limite possible est un point fixe de f , compris entre 0 et β . Seul β convient. Donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$.

Les risques d'extinction sont non nuls (dès la première génération, $p_1 = \frac{1}{8}$). À chaque génération le risque d'extinction augmente, mais de moins en moins vite. Il serait intéressant d'étudier la variable aléatoire qui mesure à quelle génération l'extinction se produit (étude peut-être ardue).