
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la valeur de α_1.
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite (α_n).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{n}{2} \leqslant \alpha_n \leqslant n.$$
   (c) En déduire la limite de la suite (α_n).
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n)}{n}$.
   (b) Montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   (c) Calculer, si elle existe, la limite de $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par
   $$u_n = \frac{n - \alpha_n}{\ln n}.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a
   $$1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln n}.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite éventuelle.
   (c) Montrer que $\ln\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln \alpha_n}{\alpha_n}$.
   (d) En déduire que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Problème 2

Dans ce problème, E désigne l'ensemble des suites réelles dites **polynomiales**, c'est-à-dire
$$E = \{(P(n))_{n\in\mathbb{N}} \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$$
et F désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + P(n). \qquad (\star)$$
On note $\mathcal{B} = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C} = (R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = (X+1)^n - X^n.$$

A Comparaison des espaces E et F

1. Montrer que si $u \in F$, alors le polynôme P de la relation $(\star)$ est unique. On le notera alors P_u.
2. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $\Phi : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ u & \longmapsto & P_u \end{array}$ est une application linéaire.
   (c) Déterminer le noyau de Φ et en donner une base et la dimension.
3. (a) Montrer que $\Psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ P & \longmapsto & (P(n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$ est une application linéaire injective.
   (b) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que la suite $u = (\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas d'antécédent par Ψ.
   On rappelle le symbole de Kronecker : $\delta_{0,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
4. Montrer que $E \subset F$.
5. (a) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ le degré du polynôme R_n.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n s'exprime comme combinaison linéaire des polynômes $R_1, \ldots, R_{n+1}$.
   (c) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. (a) Soit $u \in F$. En exprimant le polynôme P_u dans la base C, montrer l'existence d'un polynôme Q vérifiant
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Q(n).$$
   (b) Que peut-on en déduire concernant les espaces vectoriels E et F ?
   (c) Avec les notations de la question 6a, exprimer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q en fonction de ceux du polynôme P_u.

B Une application calculatoire

Dans cette partie, α désigne un entier naturel fixé. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

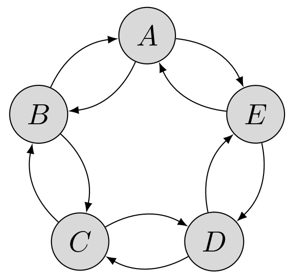
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

avec la convention $S_0 = \sum_{k=1}^{0} k^\alpha = 0$.

7. Vérifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F.
8. Démontrer l'existence d'un polynôme unitaire Q dont on précisera le degré tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$S_n = \frac{n}{\alpha+1} Q(n).$$
9. À l'aide de ce qui précède (impérativement), calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$ lorsque $n \to +\infty$.

Problème 3 **(A long time ago in a galaxy far, far away....)**

Il y a bien longtemps dans une galaxie lointaine, très lointaine, deux amis, Han et Luke, décident de se retrouver pour parler du bon vieux temps. Comme point de rendez-vous, ils ont le choix entre cinq planètes : Alderaan (A), Bespin (B), Coruscant (C), Dagobah (D) et Endor (E). Ces cinq endroits sont reliés par certaines lignes de transports selon le schéma ci-contre. Ainsi, A est à un trajet de distance de B et de E, et à 2 trajets de distance de C et de D. Même chose pour les autres lieux qui sont tous distants de un ou deux trajets (si on y va par le plus court chemin).



Hélas, suite à un malentendu, Han arrive sur Alderaan et Luke sur Bespin. À partir de ce moment, ils décident chacun de se déplacer chaque jour sur un lieu voisin jusqu'à se retrouver tous les deux au même endroit. Comme ils n'ont aucun moyen de communication, ils choisissent au hasard, de manière équiprobable, un des deux lieux accessibles depuis leur position actuelle. Chaque jour, s'ils ne sont pas au même endroit, ils font un nouveau choix indépendant des précédents et se déplacent une fois chacun (simultanément et sans possibilité de se voir s'ils se croisent). L'objet de ce problème est d'étudier la probabilité qu'ils se retrouvent au bout de n jours, pour $n \in \mathbb{N}$.

On se limite à une durée finie pour l'expérience (N jours, avec N supposé supérieur ou égal à 3). Ainsi l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ que l'on n'essaiera pas d'expliciter.

On définit les événements suivants, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- U_n : « Han et Luke sont au même endroit après le n-ième déplacement »,
- V_n : « Han et Luke sont à un trajet d'écart après le n-ième déplacement »,
- W_n : « Han et Luke sont à deux trajets d'écart après le n-ième déplacement »,

et on appelle $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$ leurs probabilités.

Remarque. Pour $n = 0$, il s'agit de leur position initiale : ainsi, $v_0 = 1$ et $u_0 = w_0 = 0$ car ils démarrent à un trajet de distance (Han en A et Luke en B).

Pour nous aider (si si !), on définit deux autres événements, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- H_n : « Lors du n-ième déplacement, Han effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Luke après le déplacement $n-1$ »,
- L_n : « Lors du n-ième déplacement, Luke effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Han après le déplacement $n-1$ ».

Exemple. Supposons qu'après 5 déplacements, Han soit en E et Luke en C. Alors l'événement H_6 décrit le fait que Han se déplace vers D lors de son sixième déplacement. Et l'événement $\overline{L_6}$ (contraire de L_6) décrit le fait que Luke se déplace vers B lors de son sixième déplacement.

On supposera que la famille des événements $(H_1, \dots, H_N, L_1, \dots, L_N)$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que dire de la famille d'événements (U_n, V_n, W_n) ?

Épisode I : premier trajet.

2. (a) À partir de la position initiale, expliciter les quatre situations possibles après le premier déplacement.
   (b) Justifier que $W_1 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1}$ et en déduire w_1.
   (c) Exprimer V_1 en fonction de H_1 et L_1 et en déduire la valeur de v_1.
   (d) Déterminer finalement u_1.

Épisode II : des inégalités. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

3. (a) Justifier l'inclusion : $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n} (H_k \cap \overline{L_k}) \right) \subset W_n$. En déduire que $w_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   (b) En vous inspirant de ce qui précède, montrer que $v_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   (c) Montrer que $U_2 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{16}$.

Épisode III : probabilités conditionnelles. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

4. (a) Montrer que $P_{U_n}(U_{n+1}) = 1$ et que $P_{U_n}(V_{n+1}) = P_{U_n}(W_{n+1}) = 0$.

   (b) Par exemple de manière analogue à une question déjà traitée, montrer que $P_{W_n}(U_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Calculer successivement $P_{W_n}(V_{n+1})$, $P_{W_n}(W_{n+1})$, $P_{V_n}(U_{n+1})$, $P_{V_n}(W_{n+1})$ et $P_{V_n}(V_{n+1})$.

Épisode IV : relations de récurrence.

5. (a) Pour tout $n \geqslant 2$ entier, exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1}, chacun en fonction de u_n, v_n et w_n.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \dfrac{5}{4} w_{n+1} - \dfrac{5}{16} w_n$.

Épisode V : résolution.

6. (a) Montrer en les déterminant qu'il existe deux nombres $0 < \alpha < \beta < 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.

   (b) Avec ces notations, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\beta^n$.

   (c) En déduire une expression puis la limite de (u_n).

Épisode VI : changement de sens. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

7. On suppose que Han et Luke sont à deux trajets d'écart après la N-ième étape. Quelle est (en fonction de N, α et β) la probabilité qu'ils aient déjà été à cette même distance après $N - 1$ étapes.