

**Problème 1**

1. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , la fonction  $f$  étant continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ . En particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*, f(\alpha_n) = n.}$$

Comme  $f(1) = 1$ , on a  $\boxed{\alpha_1 = 1}$ .

2. (a) On a  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  qui est strictement croissante en tant que bijection réciproque d'une application strictement croissante. D'autre part, pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n = f^{-1}(n)$ . Ainsi pour  $n \geq 1$ , on a :  $f^{-1}(n+1) \geq f^{-1}(n)$ , c'est-à-dire  $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ .

$$\boxed{(\alpha_n) \text{ est croissante}}$$

- (b) • Pour  $n \geq 1$ , on a  $f(n) = \ln(n) + n \geq n$  donc par croissance de  $f^{-1} : f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(n)$ . C'est-à-dire  $n \geq \alpha_n$ .

• D'autre part, on a l'inégalité suivante qui se démontre en étudiant rapidement la fonction  $f : x \mapsto x - \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{n}{2}$$

On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

En appliquant  $f^{-1}$  qui est croissante, cela donne  $\frac{n}{2} \leq f^{-1}(n) = \alpha_n$ .

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n}$$

- (c) D'après le théorème de comparaison, étant donné que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ , on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty}$$

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , par définition de  $\alpha_n$ , on a :

$$\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{n} = 1 - \frac{\ln(\alpha_n)}{n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha_n}{n} = 1 - \frac{\ln(\alpha_n)}{n}}$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n$  donc par croissance de la fonction  $\ln$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \ln(\alpha_n) \leq \ln(n)$$

Ainsi en divisant par  $n$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(\alpha_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

D'après les résultats usuels de croissances comparées, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{n} = 0$ .

Pour conclure, on utilise le résultat démontré à la question précédente, pour en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$ .

$$\boxed{\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$$

(c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{\alpha_n} \times \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ceci en utilisant la question précédente car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} = 1$ .

Par définition de  $\alpha_n$ , on a

$$\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n \quad \text{et} \quad \ln(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1} = n + 1$$

En soustrayant les égalités précédentes,

$$\ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) + (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 1$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = 1$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$  et  $\ln$  est continue en 1.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 1}$$

4. (a) Soit  $n \geq 2$ , en utilisant l'égalité qui définit la suite  $(\alpha_n)$  :  $\alpha_n = n - \ln(\alpha_n)$ .

$$1 - u_n = 1 - \frac{n - \alpha_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - n + \alpha_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - n + n - \ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, 1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)}}$$

(b) D'après la question 3b, on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 0$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)} = 0$$

et d'après la question précédente, cela implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n = 0$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

(c) On sait que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$  en reconnaissant le taux de variation de la fonction  $\ln$  en 1. Sachant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$  d'après la question 4.(b), par composition des limites, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{n}{\alpha_n} - 1} = 1$$

Ceci en remarquant que le dénominateur n'est pas nul à partir d'un certain rang. En effet  $\alpha_n = n - \ln(\alpha_n) < n$  à partir d'un certain rang car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = +\infty$ .

Le dénominateur de notre fraction est :

$$\frac{n}{\alpha_n} - 1 = \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}$$

en utilisant la relation qui définit  $\alpha_n$  :  $\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n$ .

On obtient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = 1$$

Ce qui démontre la relation obtenue :

$$\boxed{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}}$$

(d) Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$n(1 - u_n) = n \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)} = n \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n} \times \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = \underbrace{\frac{n}{\alpha_n}}_{(1)} \times \underbrace{\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)}}_{(2)} \times \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}}}_{(3)}$$

• (1) : on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$ , d'après la question 3b.

• (2) : on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \alpha_n}{\ln(n)} = 1$ , d'après la question 4b.

• (3) : enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = 1$  d'après la question précédente.

Finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = 1$ , c'est-à-dire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - u_n}{\frac{1}{n}} = 1$ , c'est-à-dire :

$$\boxed{1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

**Problème 2**

1. Soit  $P, Q$  deux polynômes à coefficients réels. Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) = Q(n)$ , alors le polynôme  $P - Q$  admet une infinité de racines et est donc nul. Ainsi  $P = Q$ .

Soit  $u \in F$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + P(n) = u_n + Q(n).$$

Alors  $P(n) = Q(n)$  pour tout  $n$ , donc  $\boxed{P = Q}$ .

2. (a) On a  $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . La suite nulle appartient à  $F$ .

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u, v) \in F^2$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(\lambda u + \mu v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(u_n + P_u(n)) + \mu(v_n + P_v(n)) = (\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n).$$

Donc  $\lambda u + \mu v \in F$ .

Conclusion :  $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ .

- (b) Pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u, v) \in F^2$ , d'après ce qui précède,

$$P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v,$$

donc  $\Phi$  est linéaire.

- (c) Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

$$\Phi(u) = 0 \iff P_u = 0 \iff \forall n, u_{n+1} = u_n \iff u \text{ est constante.}$$

Ainsi

$$\boxed{\ker \Phi = \{(\lambda)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)},$$

ce qui en fait un sev de  $\boxed{\text{dimension } 1}$ .

3. (a) Pour  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,

$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(n) + \mu Q(n))_n = \lambda \Psi(P) + \mu \Psi(Q),$$

donc  $\boxed{\Psi \text{ est linéaire}}$ .

Si  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$ , alors  $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ .

Autrement dit, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\Psi(P) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ . Donc  $\boxed{\Psi \text{ est injective}}$ .

- (b) Par définition,  $E = \text{Im}(\Psi)$ . Donc  $\boxed{E = \text{Im}(\Psi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ .

- (c) Soit  $u = (\delta_{0,n})_n$ . Supposons qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\Psi(P) = u$ . Alors  $P(0) = 1$  et  $P(n) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , donc  $P$  a une infinité de racines et est non nul, ce qui est impossible.

4. Soit  $u \in E$ ,  $u = (P(n))_n$ . Alors

$$u_{n+1} = P(n+1) = P(n) + (P(X+1) - P(X))(n),$$

donc  $\boxed{u \in F}$ .

5. (a)

$$R_n = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k,$$

donc  $\boxed{\deg R_n = n - 1}$ .

(b) Procédons par récurrence forte. On a  $X^0 = R_1$ .

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$R_{n+2} = (X+1)^{n+2} - X^{n+2} = (n+2)X^{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k,$$

donc

$$X^{n+1} = \frac{1}{n+2} \left( R_{n+2} - \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k \right),$$

Par hypothèse de récurrence et stabilité,  $\sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k \in \text{Vect}(R_1, \dots, R_{n+1})$ .

Donc  $X^{n+2} \in \text{Vect}(R_1, \dots, R_{n+2})$ .

(c) Les  $R_n$  sont de degrés distincts donc forment une famille libre. Ils engendrent  $\mathbb{R}[X]$  d'après la question précédente. Donc  $C$  est une base.

6. (a) On écrit

$$P_u = \sum_{k=1}^p a_k R_k.$$

Posons

$$Q = \sum_{k=1}^p a_k X^k.$$

Alors

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^p a_k ((n+1)^k - n^k),$$

donc

$$u_{n+1} - Q(n+1) = u_n - Q(n).$$

Ainsi  $(u_n - Q(n))_n$  est constante, et comme  $Q(0) = 0$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + Q(n).$$

Donc avec  $P = Q + u_0$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n)$ .

(b) On en déduit  $F \subset E$ . Comme  $E \subset F$ , on a montré que  $E = F$ .

(c) Si  $P_u = 0$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$  et donc  $Q = 0$ .

Sinon, si  $P_u = \sum_{k=1}^p a_k R_k$ , avec  $a_p \neq 0$ , alors

$$P = u_0 + \sum_{k=1}^p a_k X^k.$$

Le terme dominant de  $R_k$  est  $kX^{k-1}$ , donc celui de  $P_u$  est  $pa_p X^{p-1}$ .

Ainsi, si  $\deg(P) = d$ , alors  $\deg(Q) = d+1$  et  $\text{cd}(Q) = \frac{\text{cd}(P)}{d+1}$ .

7. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^\alpha = S_n + P_S(n)$$

avec  $P_S = (X+1)^\alpha$ , donc  $\boxed{S \in F}$ .

8. Il existe  $P$  tel que  $S_n = P(n)$ . Le polynôme  $P_S$  est unitaire de degré  $\alpha$ , donc  $P$  est de degré  $\alpha+1$  et de coefficient dominant  $\frac{1}{\alpha+1}$ .

Comme  $P(0) = 0$ , il existe  $Q$  unitaire de degré  $\alpha$  tel que

$$P = \frac{1}{\alpha+1} X Q(X),$$

d'où

$$\boxed{S_n = \frac{n}{\alpha+1} Q(n)}.$$

9. Posons  $S_n = \sum_{k=0}^n k^2$ . Alors

$$S_n = \frac{n}{3} Q(n), \quad Q = X^2 + aX + b.$$

On utilise  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 5$  :

$$\frac{1+a+b}{3} = 1, \quad \frac{2(4+2a+b)}{3} = 5.$$

D'où  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ , et donc

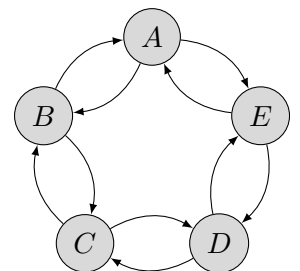
$$\boxed{S_n = \frac{n}{3} \left( n^2 + \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

10. On a  $S_n = \frac{n}{\alpha+1} Q(n)$ ,  $Q(n) \sim n^\alpha$ , donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}.$$

**Problème 3** (A long time ago in a galaxy far, far away....)

Il y a bien longtemps dans une galaxie lointaine, très lointaine, deux vieux amis, Han et Luke, décident de se retrouver pour parler du bon vieux temps. Comme point de rendez-vous, ils ont le choix entre cinq planètes : Alderaan ( $A$ ), Bespin ( $B$ ), Coruscant ( $C$ ), Dagobah ( $D$ ) et Endor ( $E$ ). Ces cinq endroits sont reliés par certaines lignes de transports selon le schéma ci-contre. Ainsi,  $A$  est à un trajet de distance de  $B$  et de  $E$ , et à 2 trajets de distance de  $C$  et de  $D$ . Même chose pour les autres lieux qui sont tous distants de un ou deux trajets (si on y va par le plus court chemin).



Hélas, suite à un malentendu, Han arrive sur Alderaan et Luke sur Bespin. À partir de ce moment, ils décident chacun de se déplacer chaque jour sur un lieu voisin jusqu'à se retrouver tous les deux au même endroit. Comme ils n'ont aucun moyen de communication, ils choisissent au hasard, de manière équiprobable, un des deux lieux accessibles depuis leur position actuelle. Chaque jour, s'ils ne sont pas au même endroit, ils font un nouveau choix indépendant des précédents et se déplacent une fois chacun (simultanément et sans

possibilité de se voir s'ils se croisent). L'objet de ce problème est d'étudier la probabilité qu'ils se retrouvent au bout de  $n$  jours, pour  $n \in \mathbb{N}$ .

On se limite à une durée finie pour l'expérience ( $N$  jours, avec  $N$  supposé supérieur ou égal à 3). Ainsi l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  que l'on n'essaiera pas d'explicitier.

On définit les événements suivants, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- $U_n$  : « Han et Luke sont sur au même endroit après le  $n$ -ième déplacement »,
- $V_n$  : « Han et Luke sont à un trajet d'écart après le  $n$ -ième déplacement »,
- $W_n$  : « Han et Luke sont à deux trajets d'écart après le  $n$ -ième déplacement »,

et on appelle  $u_n = P(U_n)$ ,  $v_n = P(V_n)$  et  $w_n = P(W_n)$  leurs probabilités.

**Remarque.** Pour  $n = 0$ , il s'agit de leur position initiale : ainsi,  $v_0 = 1$  et  $u_0 = w_0 = 0$  car ils démarrent à un trajet de distance (Han en  $A$  et Luke en  $B$ ).

On définit deux autres événements, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- $H_n$  : « Lors du  $n$ -ième déplacement, Han effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Luke après le déplacement  $n - 1$  »,
- $L_n$  : « Lors du  $n$ -ième déplacement, Luke effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Han après le déplacement  $n - 1$  ».

On supposera que la famille des événements  $(H_n, L_n)_{1 \leq n \leq N}$  est constituée d'événements mutuellement indépendants.

1.  $(U_n, V_n, W_n)$  est un système complet d'événements.

### Épisode I : premier trajet.

2. (a) Dans la position initiale, Han est en  $A$ , Luke est en  $B$ . Dans ce cas,

$H_1$  est « Han va vers  $B$  »

$L_1$  est « Luke va vers  $A$  »

D'où les quatre situations :

$H_1 \cap L_1$  : Han est en  $B$ , Luke est en  $A$ .

$H_1 \cap \overline{L_1}$  : Han est en  $B$ , Luke est en  $C$ .

$\overline{H_1} \cap L_1$  : Han est en  $E$ , Luke est en  $A$ .

$\overline{H_1} \cap \overline{L_1}$  : Han est en  $E$ , Luke est en  $C$ .

- (b) De ces quatre situations (qui forment bien un système complet d'événements), seule la dernière réalise  $W_1$  donc  $W_1 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1}$ .

Donc  $w_1 = P(\overline{H_1} \cap \overline{L_1})$ . Par indépendance (Han et Luke choisissent leur destination de manière indépendante),  $w_1 = P(\overline{H_1})P(\overline{L_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

- (c) Les trois autres situations sont incompatibles et réalisent toutes trois  $V_1$ .

Donc  $V_1 = (H_1 \cap L_1) \sqcup (H_1 \cap \overline{L_1}) \sqcup (\overline{H_1} \cap L_1)$ .

On obtient de la même manière :  $v_1 = \frac{3}{4}$ .

- (d)  $(U_1, V_1, W_1)$  est un système complet d'événements, donc  $u_1 = 1 - (v_1 + w_1)$ , soit  $u_1 = 0$ .

**Épisode II : des inégalités.**

3. (a) Examinons une issue de l'événement  $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left( \bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k}) \right)$ . On a vu que  $\overline{H_1} \cap \overline{L_1}$  place Han en  $E$  et Luc en  $C$ , donc à 2 trajets d'écart. Puis pour tout  $k$ ,  $(H_k \cap \overline{L_k})$  maintient cette distance (Han se rapproche et Luke s'éloigne à chaque déplacement). Ainsi après le  $n$ -ième déplacement, ils sont bien toujours à deux trajets d'écart (rédiger la récurrence en détail). Notre issue est bien dans  $W_n$ .

Donc  $P(W_n) \geq P\left(\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k})\right)\right)$ . À nouveau par indépendance,  $w_n \geq \frac{1}{4^n}$ .

- (b) Sur le même principe,  $V_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k})\right) \subset V_n$ . En minorant grossièrement  $v_1 = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$ , on

obtient  $v_n \geq \frac{1}{4^n}$ .

- (c)  $\supseteq$  Considérons une issue dans  $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$ .

Tout d'abord  $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} = W_1$  : Han est en  $E$ , Luke est en  $C$ .

Puis  $H_2 \cap L_2$  mène Han en  $D$  et Luke également. Donc notre issue est dans  $U_2$ .

- $\subseteq$  Considérons une issue dans  $U_2$ .

Après le 2<sup>e</sup> déplacement, Han et Luke sont au même endroit. Donc après le 1<sup>er</sup> déplacement, ils étaient chacun dans un endroit voisin de celui-ci ; mais pas dans le même car  $U_1$  est exclu. Donc ils étaient à deux trajets d'écart, ainsi notre issue est dans  $W_1$ .

On examine les quatre possibilités :

$W_1 \cap (H_2 \cap \overline{L_2}) \subset W_2$  donc est exclu (incompatible avec  $U_2$ ),

$W_1 \cap (\overline{H_2} \cap L_2) \subset W_2$  donc est exclu,

$W_1 \cap (\overline{H_2} \cap \overline{L_2}) \subset W_2$  donc est exclu.

Finalement notre issue est dans  $W_1 \cap (H_2 \cap L_2) = (\overline{H_1} \cap \overline{L_1}) \cap (H_2 \cap L_2)$ .

Finalement  $U_2 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$  et, toujours par indépendance,  $P(U_2) = \frac{1}{16}$ .

De plus lorsque Han et Luke se sont retrouvés, ils restent ensemble, donc  $U_2 \subset U_n$  pour tout

$n \geq 2$ . D'où  $P(U_n) \geq P(U_2)$ . Donc  $u_n \geq \frac{1}{16}$ .

**Épisode III : probabilités conditionnelles.** Soit  $n \geq 2$  un entier.

4. (a)  $P(U_n) \neq 0$ , donc on peut définir la probabilité conditionnelle  $P_{U_n}(U_{n+1})$ .

Comme  $U_n \subset U_{n+1}$  pour tout  $n$ ,  $U_n \cap U_{n+1} = U_n$ .

Donc  $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{P(U_n \cap U_{n+1})}{P(U_n)} = \frac{P(U_n)}{P(U_n)} = \mathbf{1}$ .

Pour la même raison,  $U_n \cap V_{n+1} = \emptyset$  et  $U_n \cap W_{n+1} = \emptyset$  donc ont pour probabilité 0 et la formule des probabilités conditionnelles donne  $P_{U_n}(V_{n+1}) = P_{U_n}(W_{n+1}) = \mathbf{0}$ .

- (b) Comme pour  $\subseteq$  dans 3c, on montre que :

$W_n \cap (H_{n+1} \cap L_{n+1}) \subset U_{n+1}$ ,

$W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap L_{n+1}) \subset W_{n+1}$ ,

$W_n \cap (H_{n+1} \cap \overline{L_{n+1}}) \subset W_{n+1}$

et  $W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}}) \subset V_{n+1}$ .

Ainsi  $W_n \cap U_{n+1} = W_n \cap (H_{n+1} \cap L_{n+1})$ .

D'où par indépendance :  $P(W_n \cap U_{n+1}) = P(W_n)P(H_{n+1})P(L_{n+1})$ .

Donc  $P_{W_n}(U_{n+1}) = P(H_{n+1})P(L_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4}}$ .

(c) De même, comme  $W_n \cap (V_{n+1}) = W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$ ,  $P_{W_n}(V_{n+1}) = P(\overline{H_{n+1}})P(\overline{L_{n+1}}) = \boxed{\frac{1}{4}}$ .

Puis comme  $(U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1})$  est un s.c.e.,  $\boxed{P_{W_n}(W_{n+1}) = \frac{1}{2}}$ .

Un raisonnement analogue encore donne :

comme  $V_n \cap (W_{n+1}) = V_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$ ,  $\boxed{P_{V_n}(W_{n+1}) = \frac{1}{4}}$  ;

comme  $V_n \cap (U_{n+1}) = V_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$ ,  $\boxed{P_{V_n}(U_{n+1}) = 0}$ .

Enfin (s.c.e.)  $\boxed{P_{V_n}(V_{n+1}) = \frac{3}{4}}$ .

#### Épisode IV : relations de récurrence.

5. (a) Soit  $n \geq 2$ . D'après la formule des probabilités totales avec le s.c.e.  $(U_n, V_n, W_n)$ , on a :

$$u_{n+1} = u_n \times P_{U_n}(U_{n+1}) + v_n \times P_{V_n}(U_{n+1}) + w_n \times P_{W_n}(U_{n+1}).$$

Après avoir écrit la même chose pour  $V_{n+1}$  et  $W_{n+1}$ , on obtient :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}w_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}w_n \end{cases}$$

(b) Soit  $n \geq 2$ .  $w_{n+2} = \frac{1}{4}v_{n+1} + \frac{1}{2}w_{n+1}$  et on remplace à l'aide des deux premières équations.

Ainsi  $w_{n+2} = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}w_n \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}w_n \right)$ . Or  $\frac{1}{4}v_n = w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$  donc on obtient après

simplifications :  $\boxed{w_{n+2} = \frac{5}{4}w_{n+1} - \frac{5}{16}w_n}$ . Cette relation est encore vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

#### Épisode V : résolution.

6. (a) Résolution classique avec l'équation caractéristique et la détermination des deux constantes. On

obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\boxed{w_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)}$  avec  $\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$  et  $\beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ . On vérifie que

$0 < \alpha < \beta < 1$ , par exemple en utilisant que  $2 < \sqrt{5} < 3$ .

(b) La troisième équation du système donne  $v_n = 4w_{n+1} - 2w_n$ , soit :

$$v_n = \left( \frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \beta^n + \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \alpha^n.$$

En utilisant  $\frac{\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$  et  $\frac{\beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}$ , on a finalement  $\boxed{v_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \alpha^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \beta^n}$ .

(c) Comme  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ , on a  $\alpha^n \rightarrow 0$  et  $\beta^n \rightarrow 0$ . Ainsi,  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Or  $u_n = 1 - v_n - w_n$  grâce au s.c.e. Donc  $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$ .

**Épisode VI : changement de sens.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

7. On cherche ici  $P_{W_N}(W_{N-1})$ . D'après la formule de Bayes :

$$P_{W_N}(W_{N-1}) = P_{W_{N-1}}(W_N) \frac{P(W_N)}{P(W_{N-1})} = \frac{1}{2} \frac{\beta^{N-1} - \alpha^{N-1}}{\beta^N - \alpha^N}.$$