

# Programme de colle 25 : du 02/04 au 05/04

## Dimension finie

- Familles libres, bases (ajout d'un vecteur indépendant des autres à une famille libre, retrait d'un vecteur dépendant des autres d'une famille génératrice).
- Espace de dimension finie.
- Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite, existence d'une base.
- Cardinal d'une base, dimension. Inégalités sur le cardinal d'une famille libre, génératrice.
- Dimension d'un sous-espace, existence d'un supplémentaire, formule de Grassmann.
- Applications linéaires en dimension finie : détermination par l'image d'une base.
- Caractérisation d'une application injective, surjective.
- Caractérisation d'un isomorphisme en dimension finie.
- Rang d'une famille, d'une application linéaire, théorème du rang. Rang d'une composée.
- Hyperplan (définition, caractérisation, caractérisation en dimension finie), espace dual.
- Dimension d'une intersection d'hyperplans, description d'un sev comme intersection d'hyperplans (équations cartésiennes).

**Exercices abordés dans le TD D5 :** 1, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 13, 14, 15, 16.

## Questions de cours

- Définition et caractérisation d'une base.
- Toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée dans un espace engendré par  $n$  vecteurs.
- Dimension d'un sev et cas d'égalité.
- Dimension d'un espace produit.
- Théorème du rang.
- Caractérisation des hyperplans.
- Dimension de l'intersection d'une famille d'hyperplans et représentation comme une telle intersection d'un sev.

## Remarques

- La construction du corps de fractions de  $\mathbb{K}[X]$  n'est pas exigible, mais elle a été traitée (sans détailler toutes les vérifications), donc on peut en parler si nécessaire.
- On peut parler d'applications linéaires (voir chapitre précédent) mais pas de rang ni de théorème du rang cette semaine.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

## Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.