

Problème 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$. On pose également $f(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. (a) Étudier f sur $[0, 1]$ en précisant sa monotonie et son maximum.
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (c) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$.
2. (a) Pour tout $n \geq 0$, simplifier $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right)$.
- (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ puis celle de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
3. Pour tout n , on pose $w_n = nu_n$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $w_{n+1} - w_n = u_n(1 - (n+1)u_n)$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite (w_n) puis montrer que cette suite converge vers une limite finie que l'on notera ℓ .
 - (c) Si l'on suppose que $\ell \neq 1$, donner un équivalent de u_n en fonction de ℓ .
 - (d) En considérant la série $\sum_{n \geq 0} (w_{n+1} - w_n)$, conclure que $\ell = 1$.

Problème 2

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est dit **stable** par f lorsque $\forall x \in V, f(x) \in V$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \text{Im}(f^n)$ et $G_n = \text{Ker}(f^n)$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ et $G_n \subset G_{n+1}$.
Par une récurrence qu'on ne détaillera pas, on peut alors démontrer que pour tous $k \leq n$ entiers, $F_n \subset F_k$ et $G_k \subset G_n$, ce dont on pourra se servir dans la suite du problème.
2. On appelle **cœur** de l'endomorphisme f l'ensemble \mathcal{C} défini par : $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, x \in F_n$.
 On appelle **nilespace** de l'endomorphisme f l'ensemble \mathcal{N} défini par : $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}, x \in G_n$.
 - (a) Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{N} sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - (b) Démontrer que \mathcal{N} et \mathcal{C} sont stables par f .
 - (c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$.
 - (d) Démontrer que f est surjective si et seulement si $\mathcal{C} = E$.

- (e) Déterminer \mathcal{N} et \mathcal{C} lorsque f est un automorphisme de E .
3. Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$.
- Établir que : $\forall p \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_n$.
 - Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $F_n = F_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite r .
 - Démontrer que $\mathcal{C} = F_r$.
 - Démontrer que $E = \mathcal{C} + G_r$.
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier n tel que $G_n = G_{n+1}$.
- Etablir que : $\forall p \in \mathbb{N}, G_{n+p} = G_n$.
 - Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $G_n = G_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite s .
 - Démontrer que $\mathcal{N} = G_s$.
 - Démontrer que $F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}$.
5. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$. Montrer que $G_n = G_{n+1}$.
6. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$. Montrer que $F_n = F_{n+1}$.
7. On suppose les conditions des questions 3 et 4 réalisées, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours r , tel que $F_r = F_{r+1}$ et qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours s , tel que $G_s = G_{s+1}$. On suppose de plus que r et s sont tous les deux non nuls.
- Montrer que $r = s$.
 - Établir que \mathcal{N} et \mathcal{C} sont supplémentaires dans E .
 - Montrer que $f|_{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ est bien définie et qu'elle est bijective.
 - Montrer que $f|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ est bien définie et qu'elle est nilpotente, c'est-à-dire qu'une de ses puissances est l'application nulle.
8. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$.
- Trouver un endomorphisme de E tel que r existe mais s n'existe pas.
 - Trouver un endomorphisme de E tel que s existe mais r n'existe pas.
 - Trouver un endomorphisme de E tel que r et s n'existent pas.

Problème 3

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice $M(1, 0, 0)$ est la matrice identité, notée I_3 et on note $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices de cette forme : $E = \{M(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

A Calcul matriciel

- Calculer J^2 et J^3 .
 - En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E . Ce produit est-il commutatif ?
 (b) En déduire que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z) \left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right) I_3.$$

- (c) Déterminer une condition suffisante (portant sur x, y et z) pour que $M(x, y, z)$ soit inversible et donner sa matrice inverse.
 (d) Montrer que cette condition est également nécessaire.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer les produits $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer toutes les solutions $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ du système $M(x, y, y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait partie.

(c) On définit les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y & 0 & 0 \\ 0 & x - y & 0 \\ 0 & 0 & x - y \end{pmatrix}$. Vérifier à

l'aide de ce qui précède que $M(x, y, y)Q = QD(x, y)$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(x, y, y)^n = QD(x, y)^n Q^{-1}$.

(e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n = \frac{1}{3}(x + 2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x - y)^n M(2, -1, -1).$$

B Marche aléatoire sur trois points

Kvicha, Ousmane et Bradley s'entraînent au foot avec Luis. Ils se passent un ballon suivant la règle suivante. À l'instant initial ($t = 0$), Kvicha à le ballon. Celui qui a le ballon à un instant donné ($t = n \in \mathbb{N}$) l'envoie à l'entraîneur Luis qui le renvoie (à l'instant $n + 1$) à l'un des trois joueurs :

- il le renvoie au même joueur avec probabilité $1 - 2p$,
- sinon il le revoie à un des deux autres joueurs de manière équiprobable.

Par exemple avec $p = \frac{1}{4}$, Kvicha a le ballon au départ. À l'instant $t = 1$, Kvicha l'aura avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et Ousmane ou Bradley l'aura, chacun avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose que cette expérience est bien modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. On définit les événements suivants pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- K_n : « Kvicha a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $k_n = P(K_n)$ sa probabilité ;
- O_n : « Ousmane a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $o_n = P(O_n)$ sa probabilité ;
- B_n : « Bradley a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

4. Déterminer, en fonction de p , les probabilités conditionnelles $P_{K_n}(K_{n+1})$, $P_{K_n}(O_{n+1})$, $P_{K_n}(B_{n+1})$, $P_{O_n}(K_{n+1})$, $P_{O_n}(O_{n+1})$, $P_{O_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(K_{n+1})$, $P_{B_n}(O_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$.
5. Exprimer les probabilités k_{n+1} , o_{n+1} et b_{n+1} en fonction de k_n , o_n et b_n et en déduire une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ o_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$
6. En déduire les probabilités k_n , o_n et b_n (en fonction de n et p) et leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Problème 4

La première partie de ce problème a déjà été traitée en grande partie, mais un petit rappel ne fait pas de mal.

Wallis, le retour

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_{n+1} \leq I_n$.
3. En utilisant par exemple un changement de variable, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

5. Montrer que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.
6. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$ est constante et déterminer cette valeur.
7. En déduire un équivalent simple de I_n .
8. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2k} et I_{2k+1} à l'aide de factorielles.
9. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}}$ et en déduire que $\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}$.

Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que f' soit strictement décroissante. Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g : t \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$.

10. Soit $d = f - g$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que d soit croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$.
On pourra dériver d et penser aux accroissements finis.
11. Démontrer que $\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$.
12. Calculer $\int_a^b g(t) dt$.

13. Justifier l'existence du nombre $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$.

14. Le but de cette question est de montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - g(t) \leq M_2 \frac{(t-a)(b-t)}{2}. \quad (\clubsuit)$$

(a) Vérifier l'inégalité (\clubsuit) pour $t = a$ et $t = b$.

(b) Soit $t \in]a, b[$. On pose h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(b-x)$ où K est une constante telle que $h(t) = 0$. Montrer que h est de classe \mathcal{C}^2 et donner l'expression de h'' .

(c) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.

(d) En déduire que $|K| \leq \frac{M_2}{2}$ puis démontrer l'inégalité (\clubsuit) souhaitée.

15. Montrer, à partir de l'inégalité (\clubsuit) précédente, que

$$\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $[n, n+1]$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et en déduire l'encadrement

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose

$$u_n = \ln \left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

17. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

18. En calculant de deux manières différentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n - u_{2n}$, démontrer que $\ell = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

19. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$