Problème 1 Des carrés magiques

Dans tout le problème, les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est notée

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9 et sa base canonique, notée $\mathcal{B}$, est formée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + lE_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9.$$

Étant donnée une telle matrice, on étudie la somme des coefficients d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. On définit ainsi huit nombres :

$$\begin{array}{lll} s_1 = a+b+c, & s_2 = k+l+m, & s_3 = r+s+t, \\ s_4 = a+k+r, & s_5 = b+l+s, & s_6 = c+m+t, \\ s_7 = a+l+t, & s_8 = r+l+c. & \end{array}$$

Notons que s_7 s'appelle la trace de la matrice.

On appelle

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note :

- S l'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
- A l'ensemble des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
- V le sous-espace $\operatorname{Vect} J$, engendré par J,
- T l'ensemble des matrices de trace nulle (*i.e.* pour lesquelles s_7 est nul).

Généralités

1. $\boxed{S = \mathrm{Vect}(E_1, E_5, E_9, E_2 + E_4, E_3 + E_7, E_6 + E_8)}$ est de dimension 6
   et $\boxed{A = \mathrm{Vect}(E_2 - E_4, E_3 - E_7, E_6 - E_8)}$ est de dimension 3.
   La concaténation de ces deux bases forme une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (9 matrices, vérifier qu'elle est libre).
   Donc $\boxed{\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = S \oplus A}$.
2. $M \mapsto \mathrm{tr}(M) = s_7$ est linéaire et son noyau est T qui est donc un sev.
   La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, surjective car non identiquement nulle. D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim(T) = 8}$.
3. On vérifie que $S \cap T \subset S$ et $V \subset S$. De plus ils sont d'intersection nulle et sont de dimensions respectives 5 et 1, dont la somme vaut bien $\dim S = 6$, donc $\boxed{S = (S \cap T) \oplus V}$.

Une application linéaire

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^8 \\ M & \mapsto & (s_1, \ldots, s_8) \end{array}$

4. φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$. On peut le vérifier pour chacune de ses applications coordonnées.
5. Notons C cette matrice : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Par exemple : $L_6 = L_1 + L_2 + L_3 - L_4 - L_5$ puis un pivot de Gauß montre que les autres lignes forment une matrice de rang 7.
7. D'après le théorème du rang, on a alors $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 2}$.

Matrices magiques

On s'intéresse maintenant à l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices *magiques*, c'est-à-dire pour lesquelles les huit nombres $s_1, \ldots, s_8$ sont tous égaux à un même nombre s, appelé somme de la matrice magique.

8. Soit l'application $\psi : M \mapsto (s_1 - s_2, s_1 - s_3, ..., s_1 - s_8)$, linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^7$. On peut exprimer $\mathcal{M}$ comme son noyau, ce qui en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9. Le plus convaincant est de procéder par analyse-synthèse. Une matrice magique M, de somme s, se décompose de manière unique $M = \underbrace{(M - sJ)}_{\in \mathcal{M} \cap T} + \underbrace{sJ}_{\in V}$.
10. On montre aisément par double inclusion que $\mathcal{M} \cap T = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Par théorème du rang, $\dim(\mathcal{M} \cap T) = 1$.
11. Seule la matrice nulle est dans $\mathcal{M} \cap T \cap S$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \cap T \cap A$.

12. Une base de $\mathcal{M}$ s'obtient, d'après 9, en concaténant une base de $M \cap T$ et une base de V, soit (avec la matrice ci-dessus) : $\boxed{\{D, J\} \text{ est une base de } \mathcal{M}}$.

Problème 2

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-\alpha)^n} = (t-\alpha)^{-n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $F : t \mapsto \dfrac{1}{-n+1}(t-\alpha)^{-n+1} = \dfrac{-1}{(n-1)(t-\alpha)^{n-1}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{(n-1)(t-\alpha)^{n-1}}\right]_{-x}^{x} = \frac{-1}{n-1}\left(\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-x-\alpha)^{n-1}}\right)$$

Comme $n - 1 > 0$, on en déduit le résultat par opération sur les limites.

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n} = 0.}$$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On écrit $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha \notin \mathbb{R}$, $b \neq 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-\alpha}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{(t-a)-ib} = \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b} + i\frac{b}{(t-a)^2+b^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} = \int_{-x}^{x} \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t + i\int_{-x}^{x} \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right)\right]_{-x}^{x} = \frac{1}{2}\left(\ln\left((x-a)^2+b^2\right) - \ln\left((-x-a)^2+b^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x-a)^2+b^2}{(-x-a)^2+b^2}\right).\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-a)^2+b^2}{(-x-a)^2+b^2} = 1$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

D'autre part, en effectuant le changement de variable affine $u = \dfrac{t-a}{b}$, on obtient

$$\int_{-x}^{x} \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{-x-a}{b}}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) - \arctan\left(\frac{-x-a}{b}\right).$$

On distingue alors deux cas.

— Si $b > 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-a}{b} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x-a}{b} = -\infty$, ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \pi.$$

— Si $b<0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-a}{b} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x-a}{b} = +\infty$, ainsi par opérations sur les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = -\pi.$$

On en déduit le résultat, par opération sur les limites.

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\alpha} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(t-\alpha)^n} = \begin{cases} i\pi & \text{si } \mathrm{Im}(\alpha)>0 \\ -i\pi & \text{si } \mathrm{Im}(\alpha)<0 \end{cases}.}$$

2. (a) Comme $\deg R<0$, la partie entière de R est nulle. Pour tout $\alpha \in \mathscr{P}$, notons ν_α la multiplicité de α en tant que pôle de R. D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe des nombres complexes $(\lambda_{\alpha,j})_{\substack{\alpha\in\mathscr{P} \\ 1\leqslant j\leqslant \nu_\alpha}}$ tels que :

$$\boxed{R(X) = \sum_{\alpha\in\mathscr{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(X-\alpha)^j}}.$$

(b) Comme $\deg R \leqslant -2$, $\deg(XR(X)) \leq -1$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xR(x) = 0$. D'autre part, pour tout $\alpha\in\mathscr{P}$, et tout $j\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-\alpha)^j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{si } j\geq 2. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question précédente, et par opérations sur les limites, on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} xR(x) = \sum_{\alpha\in\mathscr{P}} \lambda_{\alpha,1} = \sum_{\alpha\in\mathscr{P}} \mathrm{Res}_\alpha(R).$$

Par unicité de la limite,

$$\boxed{\sum_{\alpha\in\mathscr{P}} \mathrm{Res}_\alpha(R) = 0}.$$

(c) Comme R n'a aucun pôle réel, $t\mapsto R(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a, d'après la question 2b :

$$\int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{\alpha\in\mathscr{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \int_{-x}^{x} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $\alpha\in\mathscr{P}$ et $j\in\mathbb{N}^*$.

— D'après la question 1a, si $j\geq 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j}\,\mathrm{d}t = 0$.

— D'après la question 1b, si $j=1$ et $\mathrm{Im}(\alpha)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j}\,\mathrm{d}t = i\pi\lambda_{\alpha,j} = i\pi \mathrm{Res}_\alpha(R)$.

— D'après la question 1b, si $j=1$ et $\mathrm{Im}(\alpha)<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j}\,\mathrm{d}t = -i\pi\lambda_{\alpha,j} = -i\pi \mathrm{Res}_\alpha(R)$.

Par opérations sur les limites, on en déduit déjà que

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$$

De plus

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t = i\pi\left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{P}\\ \mathrm{Im}(\alpha)>0}}\mathrm{Res}_\alpha(R) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{P}\\ \mathrm{Im}(\alpha)<0}}\mathrm{Res}_\alpha(R)\right).$$

Or, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{P}\\ \mathrm{Im}(\alpha)<0}}\mathrm{Res}_\alpha(R) = -\sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{P}\\ \mathrm{Im}(\alpha)>0}}\mathrm{Res}_\alpha(R)$. D'où

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi\sum_{\alpha\in\mathscr{P}^+}\mathrm{Res}_\alpha(R)}.$$

3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. Posons $R(X) = \dfrac{X^{2m}}{X^{2n}+1}$. On a $\deg R = 2(m-n) \leq -2$. De plus, R n'a aucun pôle réel, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{2n}+1 > 0$. D'après la formule des résidu, I est bien défini et on a

$$I = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} R(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi\sum_{\alpha\in\mathscr{P}^+}\mathrm{Res}_\alpha(R).$$

Déterminons les pôles de R. Remarquons déjà que R est écrit sous forme irréductible car 0 est la seule racine possible du numérateur et 0 n'est pas racine du dénominateur. Les pôles de R sont donc les racines de $X^{2n}+1$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^{2n}+1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1$. Les pôles de R sont donc les racines $2n$-ièmes de -1. Il y en a $2n$. Donc R n'a que des pôles simples. D'autre part $\xi = \exp\left(\dfrac{i\pi}{2n}\right)$ est une racine $2n$-ième de -1. Les autres sont les $\xi\omega^k$, avec $\omega = \exp\left(\dfrac{i\pi}{n}\right) = \xi^2$ et $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Autrement dit

$$\boxed{\mathscr{P} = \left\{\xi^{2k+1} \mid k \in [\![0, 2n-1]\!]\right\}}.$$

Déterminons maintenant les pôles de R qui ont une partie imaginaire strictement positive. Soit $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. On a

$$\mathrm{Im}(\xi^{2k+1}) = \mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Ainsi

— si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $0 < \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} < \pi$, donc $\mathrm{Im}(\xi^{2k+1}) > 0$,

— si $k \in [\![n, 2n-1]\!]$, alors $\pi < \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} < 2\pi$, donc $\mathrm{Im}(\xi^{2k+1}) < 0$.

On en déduit :

$$\boxed{\mathscr{P}^+ = \left\{\xi^{2k+1} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

Calculons maintenant les résidus de ces pôles. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\alpha_k = \xi^{2k+1}$. On sait que

$$\mathrm{Res}_{\alpha_k}(R) = (R(X)(X-\alpha_k)_{|X=\alpha_k} = \left(\frac{X^{2m}}{2nX^{2n-1}}\right)_{|X=\alpha_k} = \frac{\alpha_k^{2m}}{2n\alpha_k^{2n-1}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par α_k, on obtient $\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \dfrac{\alpha_k^{2m+1}}{2n\alpha_k^{2n}}$. Donc, comme $\alpha_k^{2n} = -1$,

$$\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-\alpha_k^{2m+1}}{2n}.$$

On en déduit que

$$I = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2k+1})^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2m+1})^{2k+1}.$$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(\xi^{2m+1})^2 = \exp\left(\dfrac{(2m+1)i\pi}{n}\right) \neq 1$ car $0 < 2m+1 < 2n$. Ainsi

$$I = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{\xi^{2m+1} - (\xi^{2m+1})^{2n+1}}{1 - \xi^{2(2m+1)}} = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{1 - (\xi^{2m+1})^{2n}}{\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1}}$$

Or $(\xi^{2m+1})^{2n} = (\xi^{2n})^{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1$ et comme $|\xi| = 1$, $\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1} = -2i\operatorname{Im}(\xi^{2m+1}) = -2i\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}\right)$. D'où

$$\boxed{I = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{t^{2m}}{t^{2n}+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}}$$