

Problème 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$. On pose également $f(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. (a) f est un trinôme de racines 0 et 1, de coefficient dominant $-1 < 0$, donc sur $[0, 1]$, f est croissante puis décroissante et admet un maximum en $\frac{1}{2}$, égal à $\frac{1}{4}$.
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par récurrence :

Init. $0 < u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Si $n = 0$, $0 < u_1 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Si $n \geq 1$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. On peut alors appliquer f , croissante sur cet intervalle.

Alors $0 < u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Or $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$.

Et $\frac{n}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)^2} < 0$. Donc $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$.

Finalement, $0 < u_{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$, cqfd.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (c) La série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ est une série télescopique car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Comme (u_n) converge, cette série est convergente également.

2. (a) Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$.

Donc $S_n = \ln(u_{n+1}) + \ln(2)$.

- (b) Comme $u_n \rightarrow 0$, $\ln(u_{n+1}) \rightarrow -\infty$ donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

On a pour tout n : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$ avec $u_n \rightarrow 0$.

Donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$.

Par comparaison, comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge également.

3. Pour tout n , on pose $w_n = nu_n$.

(a) Soit $n \geq 0$. $w_{n+1} - w_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n = u_n - (n+1)u_n^2 = \boxed{u_n(1 - (n+1)u_n)}$.

(b) Comme $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, $1 - (n+1)u_n \leq 0$. De plus $u_n \geq 0$, donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et donc

$\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.

De plus $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $w_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$. Donc (w_n) est majorée.

Finalement $\boxed{(w_n) \text{ converge}}$. Notons ℓ sa limite.

(c) Supposons que $\ell \neq 1$.

On a $\frac{nu_n}{\ell} \rightarrow 1$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{\ell}{n}}$.

(d) Dans ce cas $w_{n+1} - w_n = u_n(1 - nu_n - u_n) \sim (1 - \ell)u_n$ car $\ell \neq 1$.

Or $\sum (1 - \ell)u_n$ diverge (car $(1 - \ell)u_n \sim \frac{(1 - \ell)\ell}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente).

Mais comme série télescopique, $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge car $w_n \rightarrow \ell$.

Ceci constitue une contradiction. Finalement l'hypothèse $\ell \neq 0$ est fautive.

Donc $\boxed{\ell = 1}$.

Problème 2

1. (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau et l'image d'un endomorphisme de E sont des sous-espaces vectoriels de E .

$\boxed{F_n \text{ et } G_n \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $x \in F_{n+1}$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$ ceci montre que $x \in F_n$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n}$.

Soit $x \in G_n$, on a $f^n(x) = 0$ donc $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) = 0$ et par suite $x \in G_{n+1}$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, G_n \subset G_{n+1}}$.

2. (a) Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel donc $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel puisque d'après la question 1b pour tout n entier naturel F_n est un sous-espace vectoriel.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Vérifions que \mathcal{N} est un sous-espace vectoriel de E .

- $\mathcal{N} \subset E$ car $\forall n \in \mathbb{N}, G_n \subset E$.
- $0 \in \mathcal{N}$ car $0 \in G_0$.
- Soit $(x, y) \in \mathcal{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrons que $\lambda x + y \in \mathcal{N}$. On a

$$x \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, x \in G_k \text{ et } y \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, y \in G_p.$$

Supposons que $k \leq p$, en utilisant la question 1b, on a $G_k \subset G_p$. On a ainsi $(x, y) \in G_p^2$, comme G_p est un sous-espace vectoriel de E , on a $\lambda x + y \in G_p \subset \mathcal{N}$. Même chose si on a $p < k$.

$\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}.$

- (b) Soit $x \in \mathcal{N}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{N}$. On a $x \in \mathcal{N}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_k$, c'est-à-dire $f^k(x) = 0$. On a alors $f(f^k(x)) = f^k(f(x)) = 0$ ce qui implique que $f(x) \in G_k$ donc $f(x) \in \mathcal{N}$.

$\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par } f}.$

Soit $x \in \mathcal{C}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{C}$. On a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x = f^n(y_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(f^n(y_n)) = f^{n+1}(y_n)$ donc $f(x) \in F_{n+1}$ et finalement $f(x) \in \mathcal{C}$.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est stable par } f}.$

- (c) \Rightarrow On suppose que f est injective, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n : G_n = \{0\}$$

Ainsi, on a aura : $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{0\}$

Init. Pour $n = 0$, on a $G_0 = \text{Ker}(Id) = \{0\}$, ce qui démontre que \mathcal{H}_0 est vraie.

Init. D'une part \mathcal{N} contient $\{0\}$ car c'est un sev de E .

D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_n = \{0\}$. Soit $x \in G_{n+1}$, on a $f^{n+1}(x) = 0$ donc $f^n(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in G_n$ donc $f(x) = 0$. L'application f étant injective cela implique que $x = 0$, d'où $G_{n+1} = \{0\}$.

Ceci achève la récurrence et démontre que $\mathcal{N} = \{0\}$.

- \Leftarrow Réciproquement supposons que $\mathcal{N} = \{0\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $G_n = \{0\}$ en particulier $G_1 = \text{Ker } f = \{0\}$ donc f est injective.

$\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \mathcal{N} = \{0\}}.$

- (d) \Rightarrow Supposons que f est surjective et démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n : F_n = E$$

Ainsi, on aura $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$.

Init. Pour $n = 0$, on a $F_0 = \text{Im}(Id) = E$, ce qui démontre que \mathcal{H}_0 est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_n = E$. Soit $y \in E$, $\exists x \in E$, $y = f^n(x)$, or l'application f est, par hypothèse, surjective : $\exists a \in E$, $f(a) = x$. Ainsi $y = f^n(f(a)) = f^{n+1}(a)$ et $y \in \text{Im}(f^{n+1}) = F_{n+1}$. Ce qui démontre que $F_{n+1} = E$ et qui implique que \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Cela achève la récurrence.

- \Leftarrow Réciproquement si $\mathcal{C} = E$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = E$. En particulier $F_1 = \text{Im } f = E$, ce qui montre la surjectivité de f .

$\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } \mathcal{C} = E}.$

- (e) Si f est un automorphisme de E alors f est bijective donc surjective et injective. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\boxed{\mathcal{N} = \{0\} \text{ et } \mathcal{C} = E}.$$

3. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{H}_p : F_{n+p} = F_n$.

Init. Pour $p = 0$, la propriété est évidente.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_{n+p} = F_n$, démontrons que $F_{n+p+1} = F_n$.

D'après la question 1b, on a $F_{n+p+1} \subset F_n$.

Réciproquement, soit $y \in F_n$. Alors $y \in F_{n+p}$ donc il existe $x \in E$ tel que $f^{n+p}(x) = y$, c'est-à-dire $f^p(f^n(x)) = y$. On a $f^n(x) \in F_n$ donc d'après l'hypothèse de la question $F_n = F_{n+1}$, on a $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ donc $y = f^{n+p+1}(a)$, c'est-à-dire $y \in F_{n+p+1}$. D'où $F_n = F_{n+p+1}$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_n}.$$

- (b) On considère $\{n \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+1}\}$, d'après l'hypothèse de la question cet ensemble est non vide. Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un minimum, d'où l'existence de r .

- (c) Pour tout $k \leq r$, on a $F_r \subset F_k$ d'après la question 1b donc $\bigcap_{k=0}^r F_k = F_r$.

D'autre part, d'après la question 3a, pour tout $k \geq r$, $F_k = F_r$. Finalement : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F_r$.

$$\boxed{\mathcal{C} = F_r}.$$

- (d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $E = F_r + G_r$. Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse pour se donner des idées. À noter qu'on ne demande pas l'unicité d'une décomposition (et d'ailleurs on n'y aboutira pas dans l'analyse).

Ana. Soit $y \in F_r$ et $z \in G_r$ tels que $x = y + z$.

L'application f^r étant linéaire et z appartenant à $\text{Ker}(f^r)$, on a $f^r(x) = f^r(y)$. D'après la question 3a, on a $F_r = F_{2r}$, comme $f^r(x) \in F_r$, on a $f^r(x) \in F_{2r}$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(x) = f^{2r}(a)$. On observe alors que $f^r(x - f^r(a)) = 0_E$.

On est alors tenté de poser $y = f^r(a)$ et on obtient la décomposition $x = f^r(a) + x - f^r(a)$.

Syn. Cette décomposition convient car $f^r(a) \in F_r$ et $x - f^r(a) \in G_r$ car $f^r(x - f^r(a)) = f^r(x) - f^{2r}(a) = 0$.

Ceci montre que $E \subset \mathcal{C} + G_r$, la réciproque étant immédiate pour une somme de sev de E . Donc

$$\boxed{E = \mathcal{C} + G_r}.$$

4. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{H}_p : G_{n+p} = G_n$.

Init. Pour $p = 0$ la propriété est évidente.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_{n+p} = G_n$, démontrons que $G_{n+p+1} = G_n$.

D'une part, d'après la question 1b, on a toujours $G_n \subset G_{n+p+1}$.

Réciproquement, soit $x \in G_{n+p+1}$. On a $f^{n+p+1}(x) = 0$ donc $f^{n+1}(f^p(x)) = 0$, c'est-à-dire que $f^p(x) \in G_{n+1} = G_n$ d'où $f^n(f^p(x)) = 0$ et donc $x \in G_{n+p} = G_n$. Finalement $G_{n+p+1} = G_n$ ce qui démontre \mathcal{H}_{p+1} .

On a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, G_{n+p} = G_n}.$$

- (b) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = G_n\}$ est non vide par hypothèse de la question. Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un minimum, d'où l'existence de s .
- (c) D'après la question 1b, pour tout $k \leq s$, on a $G_k \subset G_s$ et d'après la question précédente pour tout $k \geq s$, on a $G_k = G_s$. D'où

$$\boxed{\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = G_s.}$$

- (d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $F_s \cap G_s = \{0\}$. Soit $x \in F_s \cap G_s$, on a

$$\begin{cases} \exists a \in E, f^s(a) = x \\ f^s(x) = 0 \end{cases}$$

On a ainsi $f^{2s}(a) = f^s(x) = 0$, donc $a \in G_{2s}$. Or $G_{2s} = G_s$ d'après la question 4a, ceci montre que $a \in G_s$ et par suite $x = f^s(a) = 0$.

$$\boxed{F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $G_n \subset G_{n+1}$ est toujours vraie. Réciproquement, soit $x \in G_{n+1}$. On a $f^{n+1}(x) = 0$. On a $f^n(x) \in F_n = F_{n+1}$, donc il existe $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$. On a

$$f^{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow a \in G_{n+2} \Leftrightarrow a \in G_{n+1} \Leftrightarrow f^{n+1}(a) = f^n(x) = 0$$

donc $x \in G_n$, ce qui démontre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+1} \text{ et } G_{n+1} = G_{n+2} \Rightarrow G_n = G_{n+1}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $F_{n+1} \subset F_n$ est toujours vraie. Réciproquement, soit $y \in F_n$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^n(x)$. Ainsi $f(y) = f^{n+1}(x) \in F_{n+1} = F_{n+2}$. Donc il existe $a \in E$ tel que $f(y) = f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a)$. On a

$$f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a) \Leftrightarrow f^{n+1}(x) - f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow f^{n+1}(x - f(a)) = 0 \Leftrightarrow x - f(a) \in G_{n+1} = G_n,$$

donc $f^n(x - f(a)) = 0$, c'est-à-dire $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ d'où $y = f^{n+1}(a)$ et donc $y \in F_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, G_n = G_{n+1} \text{ et } F_{n+1} = F_{n+2} \Rightarrow F_n = F_{n+1}.}$$

7. (a) • Supposons dans un premier temps que $r > s$. On a $\forall k \geq s$, $G_k = G_{k+1}$, en particulier $G_{r-1} = G_r$ (puisque $r - 1 \geq s$) et $F_{r+1} = F_{r+2}$. D'après la question 6, ces deux égalités impliquent que $F_{r-1} = F_r$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de r .
- Supposons que $s > r$. On a $\forall k \geq r$, on a $F_k = F_{k+1}$, en particulier $F_{s-1} = F_s$ (puisque $s - 1 \geq r$) et $G_s = G_{s+1}$. D'après la question 5, ces deux égalités impliquent que $G_{s-1} = G_s$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de s .

Finalement, $\boxed{r = s}$.

- (b) D'après les questions 3c et 4c, on a $\mathcal{C} = F_r$ et $\mathcal{N} = G_s$. Comme $r = s$ et d'après les questions 3d et 4d, on a $E = \mathcal{C} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ d'où :

$$\boxed{E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}.}$$

(c) L'application $f|_{\mathcal{C}}$ est bien à valeurs dans \mathcal{C} puisque, d'après la question 2b, \mathcal{C} est stable par f . La restriction d'une application linéaire est linéaire, donc $f|_{\mathcal{C}}$ est bien un endomorphisme de \mathcal{C} .

- Pour l'injectivité, prenons $x \in \text{Ker}(f|_{\mathcal{C}})$. On a $x \in \mathcal{C} = F_r$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(a) = x$ ainsi $f^{r+1}(a) = f(x) = 0$ donc $a \in G_{r+1} = G_r$ (car $r = s$). Ce qui démontre que $x = f^r(a) = 0$ et par suite $\text{Ker}(f|_{\mathcal{C}}) = \{0\}$, d'où l'injectivité de $f|_{\mathcal{C}}$.
- Pour la surjectivité, prenons $y \in \mathcal{C} = F_r$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Or $F_r = F_{r+1}$, il existe $u \in E$ tel que $y = f^r(x) = f^{r+1}(u)$ donc $y = f(f^r(u))$ et on a bien $f^r(u) \in \mathcal{C}$ qui est un antécédent de y par $f|_{\mathcal{C}}$.

$$\boxed{f|_{\mathcal{C}} \text{ est surjective}}.$$

(d) Par le même raisonnement qu'à la question précédente, comme \mathcal{N} est stable par f , on a $f|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ qui est linéaire, donc $f|_{\mathcal{N}}$ est un endomorphisme de \mathcal{N} . Pour tout $x \in \mathcal{N} = G_r$, on a $f^r(x) = 0$, c'est-à-dire que $(f|_{\mathcal{N}})^r = 0$, ceci toujours en utilisant le fait que $r = s$.

$$\boxed{f|_{\mathcal{N}} \text{ est nilpotente}}.$$

8. (a) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

$$P \mapsto P'$$

L'application Δ est linéaire et par une récurrence élémentaire, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P^{(n)}$$

On a, pour tout entier naturel n , $F_n = \mathbb{R}[X]$. En effet pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit de primitiver n fois P pour obtenir un antécédent de P par Δ^n (qui sera bien un polynôme). En particulier, on a $F_0 = F_1$ et donc $r = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \text{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (que l'on peut aisément obtenir par récurrence par exemple) et $G_0 = \text{Ker}(\text{Id}) = \{0\}$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \neq G_{n+1}$ donc s n'existe pas.

(b) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Gamma : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

$$P \mapsto XP$$

L'application Γ est linéaire et une récurrence élémentaire donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^n : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto X^n P .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \{0\}$ donc $s = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Im}(\Gamma^n) = \{Q \in \mathbb{R}[X], X^n | Q\}$, ainsi $F_n \neq F_{n+1}$ et donc r n'est pas défini.

(c) Ce contre-exemple est bien plus difficile à trouver. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ noté ζ et défini par

$$\begin{cases} \zeta(X^n) = X^{n+1} & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de 2} \\ \zeta(X^n) = 0 & \text{si } n \text{ est une puissance de 2} \end{cases}$$

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{R}[X]$, connaître les images par ζ de ces vecteurs suffit à connaître ζ .

- Soit k un entier naturel. On a

$$\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}}$$

$$\zeta^{2^k}(X^{2^k+1}) = 0$$

Ainsi $X^{2^k+1} \in \text{Ker}(\zeta^{2^k})$ mais $X^{2^k+1} \notin \text{Ker}(\zeta^{2^k-1})$. La suite des noyaux (G_n) , n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui démontre que s n'existe pas.

- Soit k un entier naturel. On a $X^{2^k+1} \in F_{2^k-1}$ puisque : $\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1}$. Par contre $X^{2^k+1} \notin F_{2^k}$, pour le démontrer supposons par l'absurde que $\zeta^{2^k}(X^\ell) = X^{2^k+1}$. Il y a deux cas à considérer :

Si $\ell \geq 2^{k+1} + 1$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell)$ est nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$.

Si $\ell \leq 2^{k+1}$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell) = 0$ car entre ℓ et $2^k + \ell - 1$, il y a une puissance de 2.

Dans les deux cas c'est absurde. Ce qui démontre que F_{2^k} est strictement inclus dans F_{2^k-1} et la suite (F_n) n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang. L'indice r n'existe pas.

Problème 3

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice $M(1, 0, 0)$ est la

matrice identité, notée I_3 et on note $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices de cette forme : $E = \{M(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

A Calcul matriciel

1. (a) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I_3$.

(b) On montre par récurrence (le faire !) que $J^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ J & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 1 \\ J^2 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2 \end{cases}$.

2. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

On écrit $M(x, y, z) = xI_3 + yJ + zJ^2$ et $M(x', y', z') = x'I_3 + y'J + z'J^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } M(x, y, z) \times M(x', y', z') &= (xI_3 + yJ + zJ^2)(x'I_3 + y'J + z'J^2) \\ &= xx'I_3 + (xy' + x'y)J + (xz' + x'z)J^2 + yy'J^2 \\ &\quad + (yz' + y'z)J^3 + zz'J^4. \end{aligned}$$

Avec les formules précédentes :

$$M(x, y, z) \times M(x', y', z') = (xx' + yz' + y'z)I_3 + (xy' + x'y + zz')J + (xz' + x'z + yy')J^2.$$

Ainsi $M(x, y, z) \times M(x', y', z') = M(xx' + yz' + y'z, xy' + x'y + zz', xz' + x'z + yy')$ $\in E$.

Les rôles de x, y, z et x', y', z' sont symétriques dans cette formule (par exemple : $xx' + yz' + y'z = x'x + y'z + yz'$ et de même pour les deux autres) donc le produit matriciel sur E est commutatif.

- (b) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On applique la formule précédente avec $x' = x^2 - yz$, $y' = z^2 - xy$ et $z' = y^2 - zx$. Tout d'abord $xy' + x'y + zz' = xz^2 - x^2y + x^2y - y^2z + zy^2 - z^2x = 0$. On vérifie de même que $xz' + x'z + yy' = 0$.

Enfin, $xx' + yz' + y'z = x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz$.

Ainsi $M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)I_3$.

On vérifie que $\frac{1}{2}(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, ce qui donne

$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) I_3.$$

- (c) Si $x + y + z \neq 0$ et que x, y et z ne sont pas égaux, alors $(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \neq 0$ et on a :

$$M(x, y, z) \times \frac{1}{\frac{1}{2}(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)} M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = I_3.$$

Le produit d'éléments de E est commutatif. Ainsi $M(x, y, z)$ est inversible et

$$M(x, y, z)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)} M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx).$$

- (d) On va procéder par contraposée.

Supposons la condition fautive, c'est-à-dire que $x + y + z = 0$ ou $x = y = z$. On a alors $M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = 0_3$.

Et si $M(x, y, z)$ était inversible, alors on aurait $M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = 0_3$, soit
$$\begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ z^2 - xy = 0 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases}.$$

Dans ce cas, $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$ car x, y et z ne sont pas tous les trois nuls.

D'après notre hypothèse, cela signifie que $x = y = z$ mais dans ce cas $M(x, y, z)$ est non inversible car de rang 1.

On a donc montré par contraposée que

$$\boxed{\text{si } M(x, y, z) \text{ est inversible, alors } x + y + z = 0 \text{ ou } x = y = z.}$$

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ y - x \end{pmatrix}$.

(b) On résout le système homogène $M(x, y, y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - (x + 2y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} -2y & y & y \\ y & -2y & y \\ y & y & -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sous forme échelonnée et si $y \neq 0$, on obtient
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne le système équivalent $\begin{cases} -2u + v + w \\ v = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = w \\ v = w \end{cases}$.

D'où les solutions : $\left\{ \begin{pmatrix} w \\ w \\ w \end{pmatrix}, w \in \mathbb{R} \right\}$.

Enfin si $y = 0$, on constate que les $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ sont solutions pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait bien partie.

(c) On définit les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}$.

On a montré le résultat colonne par colonne.

$$M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x+2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Donc $M(x, y, y)Q = QD(x, y)$.

(d) On a ainsi $M(x, y, y) = QD(x, y)Q^{-1}$. Ceci permet de montrer par récurrence (le faire !) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(x, y, y)^n = QD(x, y)^n Q^{-1}$.

L'hérédité repose sur le fait que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n \times M(x, y, y) = QD(x, y)^n Q^{-1} QD(x, y) Q^{-1} = QD(x, y)^{n+1} Q^{-1}.$$

(e) On calcule d'une part $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $D(x, y)$ étant diagonale, on a (ou on le montre par récurrence) :

$$D(x, y)^n = \begin{pmatrix} (x+2y)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x-y)^n \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $QD(x, y)^n Q^{-1}$ donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2, -1, -1).$$

B Marche aléatoire sur trois points

Kylian, Ousmane et Bradley s'entraînent au foot avec Luis. Ils se passent un ballon suivant la règle suivante. À l'instant initial ($t = 0$), Kвича à le ballon. Celui qui a le ballon à un instant donné ($t = n \in \mathbb{N}$) l'envoie à l'entraîneur Luis qui le renvoie (à l'instant $n + 1$) à l'un des trois joueurs :

- il le renvoie au même joueur avec probabilité $1 - 2p$,
- sinon il le revoie à un des deux autres joueurs de manière équiprobable.

Par exemple avec $p = \frac{1}{4}$, Kvicha a le ballon au départ. À l'instant $t = 1$, Kvicha l'aura avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et Ousmane ou Bradley l'aura, chacun avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose que cette expérience est bien modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. On définit les événements suivants pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- K_n : « Kvicha a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $k_n = P(K_n)$ sa probabilité ;
- O_n : « Ousmane a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $o_n = P(O_n)$ sa probabilité ;
- B_n : « Bradley a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

4. La balle revient au même joueur avec la probabilité $1 - 2p$, donc

$$\boxed{P_{K_n}(K_{n+1}) = P_{O_n}(O_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - 2p}.$$

Comme K_{n+1}, O_{n+1} et B_{n+1} forment un système complet d'événements, on a $P_{K_n}(K_{n+1}) + P_{K_n}(O_{n+1}) + P_{K_n}(B_{n+1}) = 1$ et, par hypothèse, $P_{K_n}(O_{n+1}) = P_{K_n}(B_{n+1})$. Donc $\boxed{P_{K_n}(O_{n+1}) = P_{K_n}(B_{n+1}) = p}$.

De même, $\boxed{P_{O_n}(O_{n+1}) = P_{O_n}(B_{n+1}) = p}$ et $\boxed{P_{B_n}(O_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = p}$.

5. D'après la formule des probabilités totales (toujours avec le même système complet d'événements), $k_{n+1} = k_n P_{K_n}(K_{n+1}) + o_n P_{O_n}(K_{n+1}) + b_n P_{B_n}(K_{n+1})$. Donc $\boxed{k_{n+1} = (1 - 2p)k_n + po_n + pb_n}$.

De même, $\boxed{o_{n+1} = pk_n + (1 - 2p)o_n + pb_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = pk_n + po_n + (1 - 2p)b_n}$.

Matriciellement, cela donne $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} k_{n+1} \\ o_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M(1 - 2p, p, p) \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

6. Par analogie avec les suites géométriques, on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix} = M(1 - 2p, p, p)^n \begin{pmatrix} k_0 \\ o_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} k_0 \\ o_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les résultats de la partie précédente donnent $M(1 - 2p, p, p)^n = \frac{1}{3}M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(1 - 3p)^n M(2, -1, -1)$.

Comme $p \leq \frac{1}{2}$, on a $-1 < 1 - 3p < 1$ (en supposant $p = 0$, sinon les suites sont constantes). Donc

$$(1 - 3p)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ On a alors } \boxed{k_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}}, \boxed{o_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}} \text{ et } \boxed{b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}}.$$

Problème 4

Le but de ce problème est de trouver un équivalent de $n!$ quand $n \rightarrow +\infty$. Il se compose de trois parties. Les deux premières sont indépendantes et la troisième utilise les deux résultats finaux des parties précédentes. Ceux-ci pourront être admis pour poursuivre le problème.

Intégrales de Wallis

1. $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{I_1 = 1}$. Pour I_2 , linéariser : $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. On a alors $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Puis par croissance de l'intégrale, $\boxed{0 \leq I_{n+1} \leq I_n}$. On a même $\boxed{0 < I_{n+1}}$ car \sin^{n+1} est continue, positive et non identiquement nulle.

3. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ et on utilise que $\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ pour tout t . Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n}$.

4. On pose $\begin{cases} u(t) = \sin^{n+1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

Par intégration par parties, $I_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)$.

Or $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$. Donc $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Finalement, $\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n}$.

5. Pour tout n , $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, donc $\frac{n+1}{n+2}I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$. Et $I_n \neq 0$, donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Par théorème d'encadrement, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\boxed{I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n}$.

6. Pour tout n , $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n$, donc $\boxed{((n+1)I_n I_{n+1}) \text{ est constante}}$, égale à sa valeur pour $n = 1$: $I_0 I_1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

7. Pour tout n , $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_n I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)I_n^2 \sim nI_n^2$, donc $\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.

8. On conjecture à l'aide de la relation de la question 4, puis on montre par récurrence : pour $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2} \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{I_{2k+1} = \frac{2^{2k}k!^2}{(2k+1)!}}$.

On peut aussi mettre en place un produit télescopique.

9. Comme $I_{2k+1} \sim I_{2k}$, $\frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Or $\frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}} = \frac{2^{4k}k!^4}{2k(2k)!^2} \frac{2}{\pi}$.

Finalement, $\boxed{\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}}$.

Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave de classe \mathcal{C}^2 . Soit g la fonction affine définie sur $[a, b]$ par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

10. $\boxed{g(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)}$.

11. f étant concave, sa courbe est au dessus de chacune de ses cordes. Notamment, entre a et b , $f(t) \geq g(t)$.

Puis par croissance de l'intégrale, $\boxed{\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt}$.

12. $\boxed{\int_a^b g(t) dt = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2} + f(a)(b - a)}$.

13. f est de classe \mathcal{C}^2 donc f'' , et donc $|f''|$, est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, donc elle atteint son maximum $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$.

14. Le but de cette question est de montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - g(t) \leq M_2 \frac{(t-a)(b-t)}{2}. \quad (\ast)$$

(a) Pour $t = a$ et $t = b$, l'inégalité (\ast) revient à $0 \leq 0$, vrai.

(b) Soit $t \in]a, b[$. On pose h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(b-x)$ où K est une constante telle que $h(t) = 0$.

h est de classe \mathcal{C}^2 car f (et g) le sont et $h'' : t \mapsto f''(t) + 2K$.

(c) D'après le théorème de Rolle (vérifier soigneusement les hypothèses), il existe $c_1 \in]a, t[$ et $c_2 \in]t, b[$ tels que $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$. À l'aide du théorème de Rolle à nouveau, cette fois appliqué à h' , $\exists c \in]a, b[, h''(c) = 0$.

(d) Alors $f''(c) + 2K = 0$, d'où $K = -\frac{f''(c)}{2}$. Donc $|K| \leq \frac{M_2}{2}$ puis comme $h(t) = 0$, on a l'inégalité (\ast) souhaitée.

15. À partir de l'inégalité (\ast) précédente, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq -\frac{M_2}{2} \int_a^b (t^2 - (a+b)t + ab) dt. \text{ Or } \int_a^b (t^2 - (a+b)t + ab) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a+b}{2}t^2 + abt \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a+b}{2}(b^2 - a^2) + ab(b-a) = \frac{b-a}{6} ((2b^2 + 2ab + 2a^2) - 3(a+b)^2 + 6ab) = -\frac{(b-a)^3}{6}.$$

Finalement $\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est bien \mathcal{C}^2 sur $[n, n+1]$.

On a pour tout $t \in [n, n+1]$, $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ qui est négative donc f est concave. De plus $|f''(t)| \leq \frac{1}{n^2}$.

La corde correspondante a pour équation $g : t \mapsto (\ln(n+1) - \ln(n))(t-n) + \ln(n)$ et son intégrale vaut

$$\int_n^{n+1} g(t) dt = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n) = \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \ln(n)).$$

Et à l'aide d'une IPP, $\int_n^{n+1} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_n^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) - 1$.

Finalement, $0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}$.

Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose

$$u_n = \ln \left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

17. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geq 0$ d'après ce qui précède et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} \leq 0$, d'après l'encadrement précédent à nouveau. De plus

$v_n - u_n = \frac{1}{12(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$. On note ℓ leur limite commune.

18. D'une part $2u_n - u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell - \ell = \ell$.

D'autre part, $2u_n - u_{2n} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n(2n)!^2}{2^{4n+1}n!^4} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \right)$ d'après 10.

Par unicité de la limite, $\boxed{\ell = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)}$.

19. On a donc : $-u_n = \ln \left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2\pi)$. D'où la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$