

MP2I – MPSI
Lycée Paul Valéry

Concours blanc mai 2026

Épreuve de mathématiques

Lundi 11 mai 2026

Durée : 4 heures

Le sujet comporte 4 pages dont cette page de garde.

Les calculatrices, matériel électronique et tous les documents sont interdits.
Si un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les différents problèmes sont indépendants et pourront être abordés dans l'ordre souhaité.

Les réponses devront être soigneusement justifiées et les résultats encadrés.
La présentation et la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Problème 1

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$.

Le but de ce problème est de calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour tout réel t , on pose $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et on définit la fonction φ sur l'intervalle $[0; \pi]$ par

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0; \pi], \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. (a) Montrer que φ est continue sur $[0; \pi]$.
 (b) Justifier que φ est dérivable sur $]0; \pi]$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]0; \pi]$.
 (c) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$.
3. Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

4. Montrer qu'il existe une constante λ (à déterminer) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]0; \pi], \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \lambda.$$

5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour toute fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = 0.$$

6. Calculer la somme de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$.

Problème 2

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On note p_1, \dots, p_r les diviseurs premiers de n .

1. On choisit de manière équiprobable un entier x dans l'univers $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour tout entier m de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on appelle A_m l'événement « m divise x » (ou, de manière équivalente, « x est multiple de m »). On appelle B l'événement « x est premier avec n ».

On notera enfin A^c le complémentaire d'un événement A .

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de k événements **mutuellement indépendants**.
 (b) Pour tout entier $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ qui divise n , calculer $\text{Card}(A_m)$ puis la probabilité de A_m .
 (c) En déduire que les événements A_{p_1}, \dots, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.
 (d) Montrer que

$$B = \bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c.$$

- (e) En déduire la probabilité de B .

2. Application : on note

$$I_n = \{x \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \exists y \in \llbracket 1, n \rrbracket, xy \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

On note $\varphi(n)$ le cardinal de I_n .

(a) Énoncer le théorème de Bézout.

(b) Montrer qu'un élément x de $\llbracket 1, n \rrbracket$ appartient à I_n si et seulement s'il est premier avec n .

(c) Démontrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Problème 3

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'on note f^k le k -ième itéré de f pour la composition.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **racine carrée** de f lorsque $u^2 = f$.

A Propriétés générales

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f admet une racine carrée u .

1. Montrer que $-u$ est encore une racine carrée de f .
2. Montrer que $u \circ f = f \circ u$.
3. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$.
4. En déduire que f est bijective si et seulement si u est bijective.

B Un exemple en dimension 3

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-3x - 4y + 6z, 6x + 7y - 9z, 2x + 2y - 2z).$$

5. Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\ker(f) = \text{Vect}(v_1)$.
6. Montrer que $\text{Im}(f)$ est défini par l'équation $2x + 2y - 3z = 0$.
7. On pose $v_2 = (0, 3, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$. Montrer que (v_2, v_3) est une base de $\text{Im}(f)$.
8. Établir que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.
9. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et que $f^2 = f$.
10. Déterminer une racine carrée de f différente de f .

C Racines carrées et dérivation

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $I = \text{id}_E$ et d l'endomorphisme de E défini par

$$d(P) = P'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $d + \lambda I$ admette une racine carrée.

11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Étant donnés $m \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k.$$

- (a) Montrer que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et tous réels λ, μ ,

$$(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f).$$

- (b) Montrer que

$$P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f).$$

12. Étude de d .

- (a) Déterminer $\ker(d)$ et montrer que $\text{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- (b) Montrer que $d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

13. Condition nécessaire : on suppose que $d + \lambda I$ admet une racine carrée u .

- (a) Montrer que u et d commutent et justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(1) = a$.

- (b) En déduire que $\lambda \geq 0$.

- (c) Montrer que $\lambda > 0$.

14. Réciproque : on suppose $\lambda > 0$.

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n).$$

- (b) Déterminer R_n le reste de la division euclidienne de P_n^2 par X^{n+1} .

- (c) En déduire un endomorphisme g tel que $g^2 = I + \frac{1}{\lambda}d$ puis un endomorphisme u tel que $u^2 = d + \lambda I$.

FIN DE L'ÉPREUVE