# Chapitre C6

# Groupe symétrique

**Objectifs**

- Décomposition d'une permutation.
- Structure des petits groupes symétriques.

Dans tout le chapitre et sauf mention contraire, $E$ désigne un ensemble et $n$ un entier naturel.

## 1 Outils fondamentaux

### 1.1 Groupe symétrique

**Définition et proposition C6.1**

(i) On appelle **permutation** de $E$ toute bijection $\sigma : E \to E$.

(ii) L'ensemble des permutations de $E$, muni de la loi de composition, est un groupe, appelé **groupe des permutations de** $E$.

(iii) Si $E$ est de cardinal fini $n$, alors son groupe des permutations est de cardinal $n!$.

**Notation.** On note $S_E$ (ou parfois $\mathfrak{S}_E$) le groupe des permutations de $E$.

**Définition C6.2**

On appelle **groupe symétrique d'ordre** $n$ et on note $S_n$ le groupe $S_{[\![1,n]\!]}$ des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

**Notation.** Une permutation $\sigma \in S_n$ se note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

### 1.2 Ordre d'un élément dans un groupe

**Définition C6.3**

Soit $(G, \times)$ un groupe, $e$ son neutre et $g \in G$.

(i) On dit que $g$ est **d'ordre fini** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.

(ii) Si $g$ est d'ordre fini, on appelle **ordre de** $g$ le nombre $\min\{n \in \mathbb{N}^* \mid g^n = e\}$.

**Proposition C6.4**

Soit $(G, \times)$ un groupe, $e$ son neutre et $g \in G$ un élément d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$.

(i) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $g^n = e \Leftrightarrow d \mid n$.

(ii) Soit $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors $g^m = g^n \Leftrightarrow m \equiv n \; [d]$.

**Définition et proposition C6.5**

Soit $(G, \times)$ un groupe et $X \subset G$. On appelle **sous-groupe engendré par** $X$ (et ces deux définitions sont équivalentes)

(i) l'intersection de tous les sous-groupes contenant $X$,

(ii) le plus petit sous-groupe contenant $X$.

**Définition et proposition C6.6**

Soit $(G, \times)$ un groupe et $g \in G$. On appelle **sous-groupe engendré par** $g$ le sous-groupe de $G$ engendré par $\{g\}$.

(i) Le sous-groupe engendré par $g$ est $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) Si $g$ est d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$, alors le sous-groupe engendré par $g$ est $\{g^n \mid n \in [\![0, d-1]\!]\}$ et est de cardinal $d$.

## 2 Représentations d'une permutation

### 2.1 Support

**Définition C6.7**

Soit $\sigma \in S_E$. On appelle support de $\sigma$ l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas fixes par $\sigma$, *i.e.*

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

**Proposition C6.8**

Soit $\sigma \in S_E$. Alors $\mathrm{Supp}(\sigma)$ est stable par $\sigma$.

**Proposition C6.9**

Soit $\sigma_1, \sigma_2$ deux permutations de $E$ à supports disjoints.

(i) $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

(ii) $\mathrm{Supp}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_2)$.

### 2.2 Cycles

**Définition C6.10**

Soit $p \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_p \in E$ deux à deux distincts. On note $\gamma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ la permutation de $E$ définie par

$$x \mapsto \begin{cases} x_{i+1} \text{ si } x = x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ x_1 \text{ si } x = x_p \\ x \text{ sinon.} \end{cases}$$

Une telle permutation est appelée $p$**-cycle** ou **cycle de longueur** $p$.

**Définition C6.11**

(i) Un 2-cycle est appelé **transposition**.

(ii) Un cycle de longueur $n = \mathrm{Card}(E)$ est appelé une **permutation circulaire**.

**Proposition C6.12**

Soit $p \geqslant 2$. Un $p$-cycle est un élément d'ordre $p$ de $S_E$.

### 2.3 Décompositions d'une permutation

On suppose dans ce paragraphe que $E$ est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

**Théorème C6.13**

Toute permutation de $E$ peut se décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près des cycles.

**Théorème C6.14**

(i) Soit $p \geqslant 2$. Tout $p$-cycle est produit de $p-1$ transpositions.

(ii) Toute permutation de $E$ est produit d'au plus $n-1$ transpositions.

$S_E$ est engendré par les transpositions.

## 3 Signature d'une permutation

On se place ici dans le cas où $E = [\![1, n]\!]$.

**Définition C6.15**

Soit $\sigma \in S_n$.

(i) On dit qu'un couple $(i, j)$ est une **inversion** de $\sigma$ lorsque $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(ii) Soit $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de $\sigma$. On appelle **signature** de $\sigma$ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

(iii) On dit qu'une permutation $\sigma$ est **paire** lorsque $\varepsilon(\sigma) = +1$ et **impaire** lorsque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

**Lemme C6.16**

Soit $\sigma \in S_n$.

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{(i,j) \in \mathcal{P}_2([\![1,n]\!])} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

**Théorème C6.17**

L'application $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes.

**Proposition C6.18**

(i) Soit $\tau$ une transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$.

(ii) Soit $\gamma$ un $p$-cycle. Alors $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{p-1}$.

**Théorème C6.19**

Le morphisme signature est l'unique morphisme de groupes non trivial de $S_n$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

**Définition C6.20**

On appelle **groupe alterné** le groupe des permutations de signature 1. On note

$$A_n = \operatorname{Ker} \varepsilon = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

**Proposition C6.21**

Soit $n \geqslant 2$. Alors $\operatorname{Card}(A_n) = \dfrac{n!}{2}$.

**Méthodes**

- Savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
- Savoir décomposer une permutation en produit de transpositions.