Problème 1

L'échauffement est indépendant de la suite du problème. Simplement, il rappelle quelques résultat que vous êtes libres d'utiliser par la suite.

A Échauffement

1. Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphisme de E. Montrer que

$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$

2. On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - 4y, x - 2y) \end{array}.$$

On ne demande pas de montrer que cette application est linéaire.

(a) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?

(c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

(d) Soit $X = (3, 1)$.
Calculer $f(X)$ et montrer que $(X, f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera $\mathcal{E}$.

(e) Donner la matrice C de f dans cette base et expliciter P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$. Quelle relation lie A, C et P ?

B Généralités en dimension 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, Id désigne l'application identité de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note usuellement $f^2 = f \circ f$.

3. Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul et qu'il vérifie $f^2 = 0$.

(a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, f(x))$ soit une famille libre de E.

(b) Montrer que cette famille $\mathcal{E}$ est alors une base de E.

(c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

4. Dans cette question, on suppose que f vérifie $f^2 = -2\,\mathrm{Id}$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \lambda \cdot x$ admet une unique solution (que l'on précisera).

(b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (a, f(a))$ est une base de E.

(c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

C Un espace de polynômes

Dans cette partie, on appelle $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré maximum 3, dont on appelle $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique. On définit

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ P & \mapsto & (1+X^2)P'' - 2XP' \end{array}$$

5. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et calculer son rang.
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
   (d) On appelle F l'ensemble des polynômes $P \in E$ qui vérifient $f(P) = -2P$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.
   (e) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (f) Vrai ou faux ? (justifier)
      i. $\operatorname{Im} f = F$.
      ii. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
6. Le but de cette question est de déterminer les endomorphismes φ de E qui vérifient $\varphi^2 = f$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ solution du problème.
   (a) Montrer que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.
   (b) Montrer que $\forall P \in \operatorname{Ker} f$, $\varphi(P) \in \operatorname{Ker} f$.
   (c) On définit $\begin{array}{rcl} \varphi_0 : \operatorname{Ker} f & \to & \operatorname{Ker} f \\ P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$.
   On remarque que, d'après ce qui précède, φ_0 est un endomorphisme de $\operatorname{Ker} f$.
   Montrer que $\varphi_0^2 = 0$. En déduire que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de $\operatorname{Ker} f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) De la même manière, justifier l'existence d'un endomorphisme φ_1 de F défini par : $\forall P \in F$, $\varphi_1(P) = \varphi(P)$. Calculer φ_1^2. Que la partie B nous permet-elle de conclure ?
   (e) En déduire la forme de la matrice de φ dans une base bien choisie.