Problème 1

A Échauffement

1. Supposons que $v \circ u = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors $v(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.
Réciproquement, si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$, alors pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in \operatorname{Im} u$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi $v(u(x)) = 0$, donc $(v \circ u)(x) = 0$. Ceci montre $v \circ u = 0$.
Donc $\boxed{v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v}$

2. (a) On a $f(1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 1) = (-4, -2)$. Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$

   (b) Le calcul de A^2 donne $A^2 = A$. Donc $\boxed{f \circ f = 0}$. D'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f}$.

   (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, *i.e.* $x = 2y$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((2, 1))}$ (il s'agit bien d'une base car c'est un seul vecteur non nul.
   D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f) = 1$ et $f((1, 0)) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f((1, 0)) = \operatorname{Vect}((2, 1))}$.

   (d) On a $f(X) = f(3, 1) = (2, 1)$. Montrons que $(X, f(X))$ est libre. Si $\lambda(3, 1) + \mu(2, 1) = (0, 0)$, alors $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$, *i.e.* $\lambda = \mu = 0$. La famille est donc libre.
   Comme elle contient deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^2}$.

   (e) Dans la base $\mathcal{E} = (X, f(X))$, on a $f(X) = 0 \cdot X + 1 \cdot f(X)$ et $f(f(X)) = 0$. Donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$. car ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.
   La relation entre les matrices est $\boxed{A = PCP^{-1}}$.

B Généralités en dimension 2

3. On suppose que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

   (a) Comme $f \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrons que $(x, f(x))$ est libre.
   Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0$. En appliquant f, on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$. Comme $f^2 = 0$, cela donne $\lambda f(x) = 0$. Or $f(x) \neq 0$, donc $\lambda = 0$. L'égalité initiale donne alors $\mu f(x) = 0$, donc $\mu = 0$.
   Finalement, $\boxed{(x, f(x)) \text{ est libre}}$.

   (b) La famille $\mathcal{E} = (x, f(x))$ est libre et contient deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2. Donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est une base de } E}$.

(c) Dans la base $\mathcal{E} = (x, f(x))$, on a $f(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot f(x)$ et $f(f(x)) = f^2(x) = 0$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. On suppose que $f^2 = -2\,\mathrm{Id}$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout $f(x) = \lambda x$. En appliquant f, on obtient $f^2(x) = \lambda f(x)$, donc $-2x = \lambda^2 x$. Ainsi $(\lambda^2 + 2)x = 0_E$. Comme $\lambda^2 + 2 \neq 0$, on a $x = 0_E$.

Réciproquement, $x = 0_E$ est bien solution. Donc $\boxed{\text{l'unique solution est } x = 0}$.

(b) Soit $a \in E$ non nul. Montrons que $(a, f(a))$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a + \mu f(a) = 0_E$.
Si $\mu \neq 0$, alors $f(a) = -\dfrac{\lambda}{\mu} a$, ce qui contredit la question précédente, puisque $a \neq 0$. Donc nécessairement $\mu = 0$.
Puis $\lambda a = 0$, donc $\lambda = 0$ puisque $a \neq 0_E$.
La famille $(a, f(a))$ est libre. Comme E est de dimension 2, $\boxed{\mathcal{E} = (a, f(a)) \text{ est une base de } E}$.

(c) Dans la base $\mathcal{E} = (a, f(a))$, on a $f(a) = f(a)$ et $f(f(a)) = f^2(a) = -2a$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

C Un espace de polynômes

5. (a) Soit $P \in E$. Alors $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_1[X]$. Donc $(1 + X^2)P'' \in \mathbb{R}_3[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi $f(P) \in E$, donc $f(E) \subset E$.
Par ailleurs, la dérivation est linéaire, donc f est linéaire. Détails laissés en exercice.
Finalement, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$.

(b) On calcule :

$$f(1) = 0, \qquad f(X) = -2X, \qquad f(X^2) = 2 - 2X^2, \qquad f(X^3) = 6X.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Un rapide pivot de Gauß montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 2}$.

(c) D'après la position des pivots dans le calcul précédent, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(-2X, 2 - 2X^2) = \mathrm{Vect}(X, 1 - X^2)$.
La liberté est acquise par le calcul précédent, mais on peut aussi la justifier car les deux polynômes sont de degrés différents.
Finalement, ils forment une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(X, 1 - X^2)}$.

(d) Posons $F = \{P \in E \mid f(P) = -2P\}$. $F = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id})$ et $f + 2\,\mathrm{id}$ est linéaire car f et id le sont. Donc F est un sev de E. Mais cette déduction n'est même pas utile car le calcul suivant va montrer que F est un sev en tant que sev engendré par...

Matriciellement, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f + 2\,\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc avec $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, on a

$$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = c(X^2 - 1) + bX.$$

Donc $\boxed{F = \mathrm{Vect}(X^2 - 1, X)}$ et c'est bien une base car c'est une famille libre (polynômes de degrés distincts).

(e) D'après les questions précédentes, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(1, X^3 - 3X)$ et $F = \mathrm{Vect}(X^2 - 1, X)$.
Ainsi, dans la base $\mathcal{E} = (1, X^3 - 3X, X^2 - 1, X)$,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(f) i. Vrai. En effet, les bases obtenues précédemment sont (quasiment) les mêmes, au signe près d'un des vecteurs.

ii. Vrai, par concaténation des bases.

6. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^2 = f$.

(a) On a $f \circ \varphi = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ f$.
Donc $\boxed{f \circ \varphi = \varphi \circ f}$.

(b) Soit $P \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(P) = 0_E$, donc $f(\varphi(P)) = \varphi(f(P)) = 0_E$.
Ainsi $\boxed{\forall P \in \mathrm{Ker}\, f,\ \varphi(P) \in \mathrm{Ker}\, f}$.

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors

$$\varphi_0^2(P) = \varphi^2(P) = f(P) = 0_E.$$

Donc $\boxed{\varphi_0^2 = 0}$.
Comme $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$, la partie A permet de conclure que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de $\mathrm{Ker}\, f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

(d) Soit $P \in F$. Alors $f(P) = -2P$, donc $f(\varphi(P)) = \varphi(f(P)) = \varphi(-2P) = -2\varphi(P)$.
Ainsi $\varphi(P) \in F$ et on a montré que F est stable par φ.
On peut donc définir l'endomorphisme $\varphi_1 : F \to F$ induit par φ.
Soit $P \in F$. Alors $\varphi_1^2(P) = \varphi^2(P) = f(P) = -2P$. Donc $\boxed{\varphi_1^2 = -2\,\mathrm{Id}_F}$.

Comme $\dim(F) = 2$, la partie B permet de conclure qu'il existe une base de F dans laquelle la matrice de φ_1 est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

(e) On choisit une base de E obtenue en concaténant :

- une base de $\operatorname{Ker} f$ adaptée à φ_0 (*i.e.* dans laquelle la matrice de φ_0 sera de la forme obtenue en 6c) ;
- une base de F adaptée à φ_1 (*i.e.* dans laquelle la matrice de φ_1 sera de la forme obtenue en 6d).

Dans cette base, la matrice de φ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.