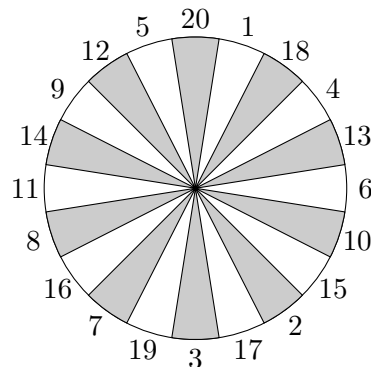


Problème 1

Ce problème modélise un jeu de fléchettes, avec quelques libertés par rapport à la réalité pour les besoins de la cause. On suppose que chaque situation peut être représentée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Premier jeu

Je joue aux fléchettes sur une cible divisée en 20 secteurs numérotés de 1 à 20.



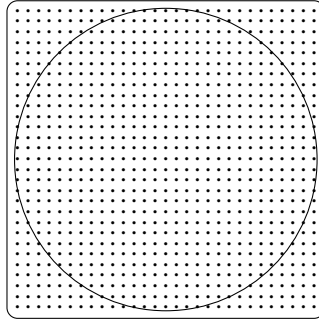
Je joue suffisamment mal pour que la probabilité pour chaque fléchette de tomber dans chacun des 20 secteurs soit égale à $\frac{1}{20}$.

1. Je décide de lancer 20 fléchettes (lancers indépendants).
 - (a) Je gagne si j'atteins le secteur 20 au moins une fois. Déterminer la probabilité de victoire.
 - (b) On appelle X la variable aléatoire du nombre de fléchettes qui ont atteint le secteur 20. Identifier la loi de X (justifier sans calculs).
2. J'ai maintenant une cible divisée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), où je décide de lancer n fléchettes.
 - (a) Je gagne si j'atteins le secteur numéro n au moins une fois. Quelle est la probabilité de victoire et la limite de cette probabilité quand $n \rightarrow +\infty$?
 - (b) On note X_n la variable aléatoire du nombre de fléchettes qui ont atteint le secteur n . Déterminer la loi de X_n et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$.

Remarque. On dira plus tard que la suite de variables aléatoires (X_n) converge (en loi) vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Deuxième jeu

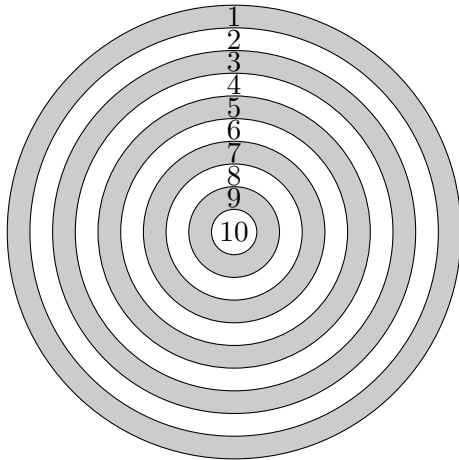
La cible est maintenant dessinée sur un support carré percé de $n \times n$ petits trous dans lesquels les fléchettes peuvent se planter.



On ne s'intéresse plus aux différentes zones ou au score. Le jeu est de lancer successivement n fléchettes, sans les reprendre (elles restent donc plantées dans le support). Je lance suffisamment mal pour que tous les trous aient la même probabilité $\frac{1}{n^2}$ d'être atteints par chaque fléchette. Si un trou déjà atteint est atteint à nouveau par une deuxième fléchette, celle-ci ne peut pas s'y planter. La partie est alors perdue. Si au contraire les n fléchettes atteignent n trous différents, j'ai gagné.

3. Montrer que la probabilité de victoire est $p_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n^2}\right)$.
4. À l'aide du calcul de $\ln(p_n)$, déterminer la limite de p_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Troisième jeu



La cible est maintenant constituée de 10 couronnes concentriques d'épaisseur 1 centimètre (*i.e.* les cercles tracés ont pour rayons $1, 2, 3, \dots, 10$). On associe à chaque zone un score entier entre 1 et 10, avec bien sûr 10 pour le disque central (de rayon 1), 9 pour la première couronne (en partant du centre), 8 pour la suivante, *etc.* comme indiqué sur le dessin. Je lance suffisamment mal pour que la probabilité que la fléchette tombe dans une zone donnée soit proportionnelle à l'aire de cette zone.

Je joue dans une fête foraine où les règles sont les suivantes : je lance une fléchette. Si je fais 6 ou plus, je gagne une somme égale au numéro de la zone (6 euros si j'atteins la zone 6, *etc.*). Si je fais 5 ou moins, je perds 2 euros.

5. La variable aléatoire N représente le numéro de la zone atteinte. Déterminer la loi de N .
6. La variable aléatoire G représente le gain lors d'un lancer (négatif si je perds de l'argent).
 - (a) Déterminer la loi et l'espérance de G . Vous remarquerez que le jeu m'est favorable (espérance de gain strictement positive).
 - (b) Le créateur du jeu souhaite modifier les règles pour que son jeu devienne rentable. Sur le même principe, je lance une fléchette et j'appelle N le numéro de la zone atteinte. Si $N \leq k$, je perds 2 euros et si $N > k$, je gagne la somme correspondante (N euros). On a vu que pour $k = 5$,

mon espérance est positive. Quelle est la plus petite valeur de k qui rende mon espérance de gain négative ?