

# Programme de colle 29 : du 25/05 au 29/05

## Représentations matricielles en algèbre linéaire

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, rang d'une famille de vecteurs, CNS pour être une base.
- Matrice d'une application linéaire dans des bases données, cas d'un endomorphisme, propriétés (image d'un vecteur, composition).
- Isomorphisme entre applications linéaires et espace de matrices.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice, noyau et image d'une matrice.
- Matrice de passage d'une base à une autre, opérations, changement de base pour un vecteur.
- Changement de bases pour une application linéaire, formules matricielles, matrices semblables, matrices équivalentes.
- Lien entre rang d'une application linéaire et rang d'une matrice, invariance par produit avec une matrice inversible
- Caractérisation du rang par équivalence à  $J_r$ , par les matrices extraites.

Exercices abordés dans le TD D5 : 1, 3, 4, 5, 7, 8.

## Groupe symétrique

- Ordre d'un élément dans un groupe, groupe engendré par une partie.
- Permutations d'un ensemble fini, de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- Support d'une permutation.
- Cycles, transpositions.
- Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions.
- Signature : définition par les inversions, formule produit, propriété de morphisme. Signature d'un cycle.
- Groupe alterné, cardinal.

Exercices abordés dans le TD C6 : 2, 3, 4, 5, 7.

## Questions de cours

- Calcul de la matrice de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- Matrice de la composée de deux applications linéaires.
- Si  $u$  est de rang  $r$ , alors il existe des bases dans lesquelles sa matrice est  $J_r$ .
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotente, alors il existe  $a \in E$  tel que  $(u^i(a))_{0 \leq i \leq p-1}$  soit une base de  $E$ .
- Étant donné  $g$  élément d'ordre  $p$  d'un groupe,  $g^n = e \Leftrightarrow p|n$ .
- Tout élément de  $S_n$  est produit d'au plus  $n - 1$  transpositions.
- La signature est un morphisme de groupes (en admettant le lemme technique ou, en version difficile, avec la démonstration de la formule produit de la signature).

## Remarques

- On insistera sur la maîtrise du cours (énoncés précis sans rien oublier) et les réflexes de méthodes (l'entraînement doit être très visible).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

## Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.