TD B9. Intégration sur un segment

Exercice B9.1 ✽

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Établir la monotonie et la convergence de la suite (I_n).
3. Exprimer $1 - I_n$ à l'aide d'une intégrale et en déduire la limite de I_n.

Exercice B9.2 ✽

Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice B9.3 ✽✽✽

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées. On notera $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{a} + \dfrac{1}{2}M_2 a$.
2. En déduire que f' est aussi bornée et que, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, on a $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice B9.4 ✽✽

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I.
Montrer que $f : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, qu'elle admet une limite finie en 0, mais qu'elle n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Exercice B9.5 ✽✽

Soit I un intervalle, $a, b \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur I.

1. Pour tout $x \in I$, on pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = f(a)e^{g(x)}$.
2. Montrer que si $f(a) = f(b)$, alors le nombre $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

Exercice B9.6 ✽

Calculer les limites ou un équivalent des quantités suivantes quand $n \to +\infty$.

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+n^2}$,
2. $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,
3. $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+2k)^3}$,
4. $d_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^3$,
5. $e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$,
6. $f_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice B9.7

1. Déterminer $\eta > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ tels que $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $x - \alpha x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice B9.8

1. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, soit $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$.
   (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_{p,0}$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
   (c) En déduire une valeur de $I_{p,q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
2. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p, contenant chacune p boules. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules rouges et $p - i$ boules blanches. On choisit aléatoirement une des urnes et on en tire $2n$ boules, successivement et avec remise. On note $A_{n,p}$ l'événement « on a tiré autant de boules rouges que de boules blanches. »
   (a) Exprimer $P(A_{n,p})$ sous forme d'une somme.
   (b) Déterminer, p étant fixé, la limite de $A_{n,p}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Indication : on pourra avoir recours à la formule de Stirling.*
   (c) Déterminer, n étant fixé, la limite de $A_{n,p}$ lorsque p tend vers $+\infty$. *Indication : on pourra penser aux sommes de Riemann.*