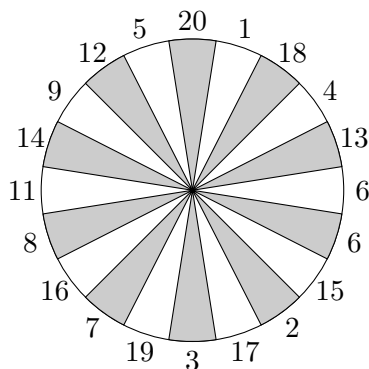


Problème 1

Ce problème modélise un jeu de fléchettes, avec quelques libertés par rapport à la réalité pour les besoins de la cause. On suppose que chaque situation peut être représentée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Premier jeu

Je joue aux fléchettes sur une cible divisée en 20 secteurs numérotés de 1 à 20.



Je joue suffisamment mal pour que la probabilité pour chaque fléchette de tomber dans chacun des 20 secteurs soit égale à $\frac{1}{20}$.

- Je décide de lancer 20 fléchettes (lancers indépendants). Je note S_i le numéro du secteur atteint par la i -ième fléchette. S_i suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 20 \rrbracket$.

(a) Soit V l'événement correspondant à une victoire. On passe par l'événement complémentaire.

$\bar{V} = \bigcap_{i=1}^{20} [S_i \neq 20]$. Or pour tout i , $P(S_i \neq 20) = \frac{19}{20}$ (loi uniforme) et les lancers sont indépendants, donc les événements concernant des S_i différents le sont aussi.

Finalement $P(\bar{V}) = \prod_{i=1}^{20} P(S_i \neq 20) = \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$. Puis $P(V) = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$.

(b) X représente le nombre de succès (atteindre le secteur 20) lors des 20 lancers, chaque lancer ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{20}$. Donc $X \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{1}{20}\right)$.

- J'ai maintenant une cible divisée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), où je décide de lancer n fléchettes.

(a) Comme pour la première partie, $P(V) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or $n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1/n}{1/n} = -1$, donc tend vers -1 .

Par continuité de exp, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(b) On a $X_n \sim \mathcal{B} \left(n, \frac{1}{n} \right)$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-k}$.

Alors $P(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.

Or $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$ et donc $\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

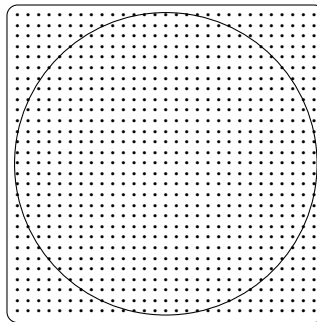
De plus on a déjà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = e^{-1}$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$.

Remarque. On dira plus tard que la suite de variables aléatoires (X_n) converge (en loi) vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Deuxième jeu

La cible est maintenant dessinée sur un support carré percé de $n \times n$ petits trous dans lesquels les fléchettes peuvent se planter.



On ne s'intéresse plus aux différentes zones ou au score. Le jeu est de lancer successivement n fléchettes, sans les reprendre (elles restent donc plantées dans le support). Je lance suffisamment mal pour que tous les trous aient la même probabilité $\frac{1}{n^2}$ d'être atteints par chaque fléchette. Si un trou déjà atteint est atteint à nouveau par une deuxième fléchette, celle-ci ne peut pas s'y planter. La partie est alors perdue. Si au contraire les n fléchettes atteignent n trous différents, j'ai gagné. On note V l'événement « gagner à ce jeu ».

3. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_i l'événement « la i -ième fléchette se plante dans un trou pas encore occupé ». Alors $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$.

Chaque trou a la même probabilité d'être atteint. Lorsqu'on lance la i -ième fléchette, $i-1$ trous sont occupés. Donc $P(V_i) = \frac{n^2 - i}{n^2}$.

De plus les lancers sont indépendants, donc $P(V) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n^2 - (i-1)}{n^2} \right)$. Une réindexation donne

$$p_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n^2} \right).$$

4. Tout d'abord, on redémontre avec Taylor reste intégral que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$

$$-x - x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x.$$

$$\text{Puis } \ln(p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{i}{n^2} \right).$$

On utilise l'encadrement précédent avec $\frac{i}{n^2} \leq \frac{1}{2}$ lorsque $i \leq n-1$ (valable dès que $n \geq 2$) :

$$-\frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{n^4} \leq \ln \left(1 - \frac{i}{n^2} \right) \leq -\frac{i}{n^2}.$$

On somme de 1 à $n-1$, ce qui donne $-\frac{n(n-1)}{2n^2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^4} \leq \ln(p_n) \leq -\frac{n(n-1)}{2n^2}$.

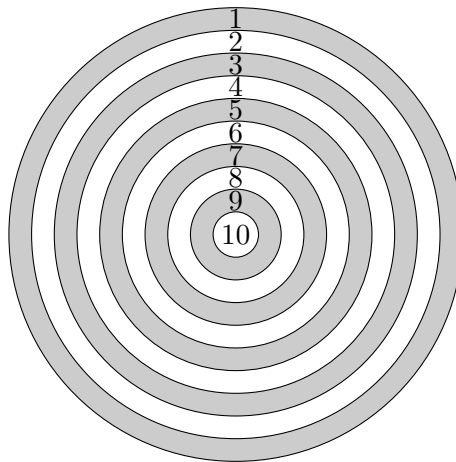
$$\text{Finalement, } \forall n \geq 2, \quad -\frac{n-1}{2n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq \ln(p_n) \leq -\frac{n-1}{2n}.$$

Par croissance de \exp , $\exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right) \exp \left(-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) \leq p_n \leq \exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right)$.

Or $\exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}}$ et $\exp \left(-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

Troisième jeu



La cible est maintenant constituée de 10 couronnes concentriques d'épaisseur 1 centimètre (*i.e.* les cercles tracés ont pour rayons $1, 2, 3, \dots, 10$). On associe à chaque cercle un score entier entre 1 et 10, avec bien

sûr 10 pour le disque central (de rayon 1), 9 pour la première couronne (en partant du centre), 8 pour la suivante, *etc.* comme indiqué sur le dessin. Je lance suffisamment mal pour que la probabilité que la fléchette tombe dans une zone donnée soit proportionnelle à l'aire de cette zone.

Je joue dans une fête foraine où les règles sont les suivantes : je lance une fléchette. Si je fais 6 ou plus, je gagne la somme correspondante (6 euros si j'atteins la zone 6, *etc.*). Si je fais 5 ou moins, je perds 2 euros.

5. La zone 10 a pour aire $\pi \times 1^2$, la zone 9 a pour aire $\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = \pi(2^2 - 1^2)$ (le disque de rayon 2 privé du disque de rayon 1) et de même pour $i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, la zone i a pour aire $\pi \times ((11-i)^2 - (10-i)^2)$. Si bien que l'aire des zones est proportionnelle à 1 (pour la zone 10), 3 (pour la zone 9), *etc.*, à $2i + 1$ pour la zone $10 - i$. Et l'aire totale est proportionnelle à $10^2 = 100$. D'où la loi de N :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(N = i)$	$\frac{19}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

6. La variable aléatoire G représente le gain lors d'un lancer (négatif si je perds de l'argent).

- (a) On a $G(\Omega) = \{-2, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pour $i \geq 6$, $[G = i] = [N = i]$ et $[G = -2] = [N \leq 5]$.

k	-2	6	7	8	9	10
$P(G = k)$	$\frac{75}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

$$\text{Puis } \mathbb{E}(G) = (-2) \times \frac{75}{100} + 6 \times \frac{9}{100} + 7 \times \frac{7}{100} + 8 \times \frac{5}{100} + 9 \times \frac{3}{100} + 10 \times \frac{1}{100} = \boxed{\frac{30}{100}}.$$

- (b) Avec $k = 6$, la loi devient :

k	-2	7	8	9	10
$P(G = k)$	$\frac{84}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

$$\text{Et l'espérance : } \mathbb{E}(G) = (-2) \times \frac{84}{100} + 7 \times \frac{7}{100} + 8 \times \frac{5}{100} + 9 \times \frac{3}{100} + 10 \times \frac{1}{100} = \boxed{-\frac{42}{100}}. \text{ C'est donc à partir de } \boxed{k = 6} \text{ que l'espérance devient négative}$$