Chapitre B9

Intégration sur un segment

Objectifs

- Fonctions lipshitziennes et uniformément continues.
- Principe d'une approximation uniforme.
- Construction de l'intégrale.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I désigne un intervalle et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1 Uniforme continuité

Définition B9.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est **uniformément continue sur** I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Définition B9.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est K**-lipschitzienne sur** I lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

On dit que f est **lipschitzienne sur** I lorsqu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ telle qu'elle soit K-lipschitzienne.

Proposition B9.3

(i) Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.

(ii) Toute fonction uniformément continue sur un intervalle y est continue.

Théorème B9.4 (Heine)

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

2 Continuité par morceaux

Définition B9.5

On appelle **subdivision de** $[a,b]$ toute famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

2.1 Fonctions en escalier

Définition B9.6

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à f.

Notation. L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition B9.7

Soit $f, g \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) L'ajout d'un nombre fini de points à une subdivision adaptée à f en fait encore une subdivision adaptée à f.

(ii) La réunion de deux subdivisions adaptées respectivement à f et g est une subdivision adaptée à f et à g.

Les fonctions $|f|$, $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, λf, $f+g$ et fg sont en escalier sur $[a,b]$.

2.2 Fonctions continues par morceaux

Définition B9.8

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité en a_k et a_{k+1}. Une telle subdivision est alors dite **adaptée** à f.

Notation. L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

Proposition B9.9

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les fonctions $|f|$, $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, λf, $f+g$ et fg sont également dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

Théorème et définition B9.10

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée. On appelle **norme infinie de** f et on note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

2.3 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Proposition B9.11

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

(i) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(ii) $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Définition B9.12

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

(i) On appelle **distance uniforme** le réel $\|f-g\|_\infty$.

(ii) On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur $[a,b]$ lorsque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On dit alors que f est la **limite uniforme** de la suite de fonctions (f_n).

Théorème B9.13

Toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

3 Construction de l'intégrale

3.1 Fonctions en escalier

Théorème et définition B9.14

Soit $f \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]a_i,a_{i+1}[$.
Alors le nombre $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)y_i$ ne dépend pas de la subdivision σ choisie. On l'appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ et on le note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition B9.15

Soit $f,g \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

(i) Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

(ii) Inégalité triangulaire (améliorée) : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

3.2 Fonctions continues par morceaux

Théorème et définition B9.16

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, la suite $\displaystyle\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers une limite qui ne dépend pas du choix de la suite (φ_n).
Cette limite s'appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition B9.17

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(i) Linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

(ii) Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

(iii) Relation de Chasles : $\forall c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

(iv) Parties réelle et imaginaire : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$.

(v) Si f et g coïncident sauf en un nombre fini de valeurs, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$.

Proposition B9.18

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

(i) Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

(ii) Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Notation. Pour $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ et $a, b \in I$, on note $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$ si $a \leqslant b$ et $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$ si $a > b$.

Remarque. Les théorèmes d'intégration énoncés précédemment découlent naturellement de cette définition étendue :

- théorème fondamental de l'analyse,
- théorème fondamental du calcul intégral,
- intégration par parties,
- changement de variable,
- formule de Taylor avec reste intégral,
- inégalité de Taylor-Lagrange (que l'on peut maintenant énoncer avec la notation $\|\cdot\|_\infty$),

4 Approximation d'intégrales

Théorème B9.19 (Sommes de Riemann)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- On a de même $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f \in \mathcal{CM}([0,1],\mathbb{K})$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut toujours se ramener à ce cas, quitte à effectuer un changement de variable affine.

Méthodes

- Calculer une limite à l'aide d'une somme de Riemann.