

Concours blanc mai 2026

Épreuve de mathématiques

Corrigé

Problème 1

1. Voir cours.
2. (a) Tout d'abord, φ est continue sur $]0; \pi]$ (en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Il reste donc à étudier la continuité en 0. On a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \quad \text{et} \quad 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t.$$

Par conséquent, $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{t}{t}$ c'est-à-dire $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -1$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = -1 = \varphi(0).$$

Ainsi, φ est continue sur $]0; \pi]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$: la fonction φ est donc également continue en 0.

- (b) La fonction φ est dérivable sur $]0; \pi]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas (sur cet intervalle). De plus,

$$\forall t \in]0; \pi], \quad \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- (c) Commençons par remarquer que φ' est continue sur $]0; \pi]$ par opérations sur les fonctions continues comme précédemment. Il reste à montrer que φ est dérivable en 0 et de dérivée continue en 0. Pour cela on a plusieurs méthodes.

— On peut déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t)$ et utiliser le théorème de la limite de la dérivée. Comme il faudra montrer que φ' est continue en 0, il faudra de toute façon déterminer cette limite. Cette méthode

est donc la plus simple. Cependant elle ne sépare pas les difficultés donc si on échoue à calculer la limite, on n'aura aucun point. On a

$$4 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 4 \left(\frac{t}{2} \right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2.$$

On va déterminer le développement limité à l'ordre 2 du numérateur de φ' : Pour cela, il suffit d'un développement à l'ordre 2 de sinus et d'un à l'ordre 1 de cosinus (regarder par quoi ils sont multipliés). On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) &= \left(1 - \frac{t}{\pi} \right) 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) = \left(1 - \frac{t}{\pi} \right) 2 \left(t + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2) \right) = -t + \frac{t^2}{\pi} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2) \\ \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right) &= \left(-t + \frac{t^2}{2\pi} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right) = \left(-t + \frac{t^2}{2\pi} \right) \left(1 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t) \right) = -t + \frac{t^2}{2\pi} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2) \end{aligned}$$

Par différence, on a

$$\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} t^2 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2).$$

Ainsi, on a pour équivalent du numérateur

$$\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} t^2.$$

Par conséquent, $\varphi'(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi}$. La fonction φ est continue sur $[0; \pi]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; \pi]$ et on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi}$. Grâce au théorème de la limite de la dérivée, φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$ et φ' est continue en 0.

— On peut montrer que φ est dérivable en 0 à l'aide du taux d'accroissements. Pour $t \in]0; \pi]$ on a

$$\tau(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{\sin(\frac{t}{2})} + 1}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2t \sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

Pour le dénominateur on a

$$2t \sin \left(\frac{t}{2} \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t \times \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2.$$

Pour le numérateur on va faire un développement limité au premier ordre permettant d'avoir un équivalent. Comme $\sin(x) = x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2)$ on a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \left(\frac{t}{2} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2) \right) = \frac{t^2}{2\pi} + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^2).$$

Le numérateur est donc équivalent à $\frac{t^2}{2\pi}$. Par quotient on a

$$\tau(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}.$$

Ainsi le taux d'accroissement en 0 de φ a pour limite $\frac{1}{2\pi}$ quand t tend vers 0. La fonction φ est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

On montre que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} = \varphi'(0)$ par la même méthode que précédemment. Ainsi φ' est continue en 0.

- On peut montrer que φ est dérivable en 0 à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1. Pour cela, montrer que $\varphi(x) = -1 + \frac{x}{2\pi} + o(x^2)$.

En conséquence φ est dérivable sur $[0; \pi]$ et de dérivée continue donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer l'intégrale proposée, on procède à deux intégrations par parties successives (licites puisque toutes les fonctions considérées sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; \pi]$).

$$\begin{aligned} \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) \times \frac{\sin(k\pi)}{k}}_0 - \frac{1}{k} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(kt) dt \\ &= -\frac{1}{k} \left(\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \times \frac{-\cos(kt)}{k} dt \right) \\ &= -\frac{1}{k} \left((1-1) \times \frac{-\cos(k\pi)}{k} - (0-1) \times \frac{-\cos(0)}{k} + \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0; \pi]$ fixés. On pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. On a

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikt}) = \Re \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \Re \left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right).$$

On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = e^{it} \neq 1$ (puisque t est dans l'intervalle $]0; \pi]$). Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^n (e^{it})^k = e^{it} \frac{1 - e^{itn}}{1 - e^{it}} = e^{it} \frac{e^{i \frac{nt}{2}} (e^{-i \frac{nt}{2}} - e^{i \frac{nt}{2}})}{e^{i \frac{t}{2}} (e^{-i \frac{t}{2}} - e^{i \frac{t}{2}})} = e^{i \frac{n+1}{2} t} \frac{-2i \sin \left(\frac{nt}{2} \right)}{-2i \sin \left(\frac{t}{2} \right)} = e^{i \frac{n+1}{2} t} \times \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} \right) \cos \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

On sait que pour tout (a, b) de \mathbb{R}^2 , on a : $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$. Par conséquent, pour tout entier n et tout t dans $]0; \pi]$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{\frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{n+(n+1)}{2}t\right) + \sin\left(\frac{n-(n+1)}{2}t\right) \right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; \pi], \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

5. Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$ et soit $x > 0$ un réel. On a alors en intégrant par parties (licite puisque les fonctions $t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $t \mapsto g(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$).

$$\int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x} g(t) \right]_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt = \frac{g(0) - \cos(x\pi)g(\pi)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt.$$

On a d'une part

$$\left| \frac{g(0) - \cos(x\pi)g(\pi)}{x} \right| \leq \frac{|g(0)| + |\cos(x\pi)||g(\pi)|}{x} \leq \frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x},$$

et d'autre part,

$$\left| \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt \right| \leq \int_0^\pi |g'(t) \cos(xt)| dt \leq \int_0^\pi |g'(t)| dt.$$

La fonction g étant de classe \mathcal{C}^1 , la fonction g' est continue donc la fonction $|g'|$ l'est aussi. Par le théorème des bornes atteintes, elle est majorée. On peut donc continuer à majorer l'intégrale. Cependant cela n'est pas nécessaire.

Posons $M = \int_0^\pi |g'(t)| dt$ qui est un réel indépendant de x . Par ce qui précède on a, pour tout x strictement positif,

$$\left| \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x} + \frac{M}{x}.$$

Or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x} + \frac{M}{x} \right) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = 0.$$

6. Montrons que la somme de la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est $\frac{\pi^2}{6}$. Soit $n \geq 2$ un entier. En reprenant le résultat de la question 3 et par linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt.$$

D'après la question 4, pour tout $t \in]0; \pi]$ on a

$$h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \frac{h(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t) = \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t).$$

Les fonctions $t \mapsto h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)$ et $t \mapsto \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$ de l'égalité précédente sont continues en 0 (par opérations sur les fonctions continues). L'égalité étant valide sur $]0; \pi]$, par passage à la limite, elle l'est aussi sur $[0; \pi]$. On peut aussi tout simplement évaluer les fonctions en 0.

Nous avons alors

$$\forall t \in [0; \pi], \quad h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt = \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt.$$

Or, on sait que $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série convergente donc la suite de ses sommes partielles converge. Par ailleurs, la fonction φ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$, on a, d'après la question 5,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt.$$

Il reste alors à calculer l'intégrale précédente.

$$\int_0^\pi h(t) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

En conclusion on a montré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problème 2

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Des événements E_1, \dots, E_k sont mutuellement indépendants si

$$\forall J \subset \{1, \dots, k\}, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{j \in J} P(E_j).$$

- (b) Soit $m \in \{1, \dots, n\}$ qui divise n . L'événement A_m est l'ensemble des issues $x \in \{1, \dots, n\}$ multiples de m . On a donc $A_m = \left\{m, 2m, \dots, \frac{n}{m}m\right\}$. Ainsi on a $\text{Card}(A_m) = \frac{n}{m}$. La probabilité étant uniforme et $\Omega = \{1, \dots, n\}$, on a

$$P(A_m) = \frac{\text{Card}(A_m)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n}{m}}{n} = \boxed{\frac{1}{m}}.$$

(c) Soit $J \subset \{1, \dots, r\}$. Pour $x \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j \in J} A_{p_j} &\iff \forall j \in J, x \in A_{p_j} \\ &\iff \forall j \in J, p_j | x. \end{aligned}$$

Les p_j étant des nombres premiers différents, ils sont premiers entre eux. Par le corollaire de Gauss, ils divisent x si et seulement si leur produit divise x . Notons $m = \prod_{j \in J} p_j$ on a

$$x \in \bigcap_{j \in J} A_{p_j} \iff \prod_{j \in J} p_j | x \iff m | x \iff x \in A_m.$$

On a donc l'égalité des événements $\bigcap_{j \in J} A_{p_j} = A_m$. Par la question précédente, on a alors

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\right) = P(A_m) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_j} = \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j \in J} P(A_{p_j}).$$

Ceci étant vrai pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$, les événements A_{p_1}, \dots, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.

- (d) • Si $x \in \{1, \dots, n\}$ n'est pas premier avec n alors $(x \wedge n) > 1$. En prenant un diviseur premier de $(x \wedge n)$, il existe un diviseur premier de n qui soit aussi diviseur de x . Comme les diviseurs premiers de n sont p_1, \dots, p_r , il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que p_k divise x et donc $x \in A_k$. On a donc $x \in \bigcup_{k=1}^r A_k$.
- Réciproquement si $x \in \bigcup_{k=1}^r A_k$, il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $x \in A_k$ et donc p_k divise x . Ainsi x n'est pas premier avec n .

Par double inclusion on a montré que $B^c = \bigcup_{k=1}^r A_k$. Le complémentaire d'une union étant l'intersection

des complémentaires on obtient $B = \bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c$.

- (e) Les événements A_{p_1}, \dots, A_{p_r} étant mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi. On a alors

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c\right) = \prod_{k=1}^r P(A_{p_k}^c) = \prod_{k=1}^r (1 - P(A_{p_k})).$$

Avec la question 1b on obtient $P(B) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

2. (a) Le théorème de Bézout affirme que pour des entiers relatifs a et b non simultanément nuls, a et b sont premiers entre eux si et seulement il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
- (b) • Soit $x \in I_n$, il existe $y \in \{1, \dots, n\}$, tel que $xy \equiv 1 [n]$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1 + kn$ soit $xy + (-k)n = 1$. Par le théorème de Bézout, x est premier avec n .

- Si $x \in \{1, \dots, n\}$ est premier avec n alors par le théorème de Bézout il existe des entiers u et v tels que $ux + vn = 1$. Modulo n on a alors $ux + 0 \equiv 1 \pmod{n}$. Posons $y \in \{1, \dots, n\}$ congru à u modulo n (y existe car on peut prendre le reste de la division euclidienne de u par n si celui-ci est non nul et prendre $y = n$ sinon). Par les propriétés de la relation d'équivalence modulo n on a $xy \equiv xu \equiv 1 \pmod{n}$. Ainsi x appartient à I_n .

Ainsi un élément $x \in \{1, \dots, n\}$ appartient à I_n si et seulement si il est premier avec n .

- (c) Par la question précédente I_n est l'ensemble des $x \in \{1, \dots, n\}$ qui sont premiers avec n . Dans la première partie cet ensemble avait été noté B . On a alors

$$\varphi(n) = \text{Card}(I_n) = \text{Card}(B).$$

Par équiprobabilité on a $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$ donc $\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega)P(B) = \text{Card}(\{1, \dots, n\})P(B)$.

On a donc

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Problème 3

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'on note f^k le k -ième itéré de f pour la composition.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **racine carrée** de f lorsque $u^2 = f$.

A Propriétés générales

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit u une racine carrée de f .

1. Par définition on a $u^2 = f$. Pour tout $x \in E$, par linéarité de u on a

$$(-u)^2(x) = -u(-u(x)) = u(u(x)) = u^2(x) = f(x)$$

On a donc $(-u)^2 = f$ et $-u$ est aussi une racine carrée de f .

2. On a $f = u^2$ donc

$$\boxed{u \circ f} = u \circ u^2 = u^3 = u^2 \circ u = \boxed{f \circ u}.$$

3. — Soit $x \in \ker(u)$ on a $f(x) = u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.

Ainsi on a l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(f)$.

— Soit $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $y = u^2(x) = u(u(x))$. Comme $u(x)$ est un antécédent de y par u , y appartient à $\text{Im}(u)$. On a donc l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$.

4. — Si u est bijective, comme la composée d'applications bijectives est bijective on a $f = u^2$ qui est bijective.

— Si f est bijective alors elle est injective et surjective.

Étant injective on a $\ker(f) = \{0_E\}$. Par la question précédente on a alors $\ker(u) \subset \{0_E\}$. Cela implique que $\ker(u) = \{0_E\}$ (car $0_E \in \ker(u)$). Ainsi u est injective.

Étant surjective on a $\text{Im}(f) = E$. Par la question précédente on a alors $E \subset \text{Im}(u)$ et donc $\text{Im}(u) = E$ (car $\text{Im}(u)$ est inclus dans l'ensemble d'arrivée E de u). Ainsi u est surjective.

Étant injective et surjective, u est bijective.

On a donc bien montré que f est bijective si et seulement si u est bijective.

B Un exemple en dimension 3

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-3x - 4y + 6z, 6x + 7y - 9z, 2x + 2y - 2z).$$

5. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff f((x, y, z)) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -3x - 4y + 6z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x - 4y + 6z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ -3x - 4y + 6z = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 3z \\ x = -y + z = -2z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = z(-2, 3, 1) \end{aligned}$$

Pour $\boxed{v_1 = (-2, 3, 1)}$ on a donc $\ker(f) = \text{Vect}(v_1)$.

6. Montrons que $\text{Im}(f)$ est défini par l'équation $2x + 2y - 3z = 0$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$2(-3x - 4y + 6z) + 2(6x + 7y - 9z) - 3(2x + 2y - 2z) = (-6 + 12 - 6)x + (-8 + 14 - 6)y + (12 - 18 + 6)z = 0.$$

En conséquence $\text{Im}(f)$ est inclus dans l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x + 2y - 3z = 0$.

Par la question précédente on a $\ker(f) = \text{Vect}(v_1)$ où $v_1 \neq 0$. La famille (v_1) est une famille de un vecteur non nul donc elle est génératrice de l'espace qu'elle engendre. Ainsi $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Vect}(v_1)) = 1$. Par le théorème du rang on a $\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Par ailleurs l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y - 3z = 0\}$ étant un plan de \mathbb{R}^3 , il est de dimension 2.

Ayant une inclusion et l'égalité des dimensions finies on a

$$\boxed{\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y - 3z = 0\}}.$$

7. Les vecteurs $v_2 = (0, 3, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$ sont des solutions de l'équation $2x + 2y - 3z = 0$ donc ils appartiennent à $\text{Im}(g)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_2 + \mu v_3 = 0$. On a $(\mu, 3\lambda - \mu, 2\lambda) = (0, 0, 0)$. En étudiant la première et la dernière coordonnées on obtient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi la famille (v_2, v_3) est libre.

On rappelle qu'on avait prouvé que $\text{Im}(g)$ est de dimension 2. Étant libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel, $\boxed{(v_2, v_3)}$ est une base de $\text{Im}(f)$.

8. D'après le théorème du rang on a

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Soit $u \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Comme $u \in \ker(f) = \text{Vect}(v_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v_1 = (-2\lambda, 3\lambda, \lambda)$. Comme $u \in \text{Im}(f)$, ses coordonnées vérifient l'équation de $\text{Im}(f)$. On a donc $2 \times (-2\lambda) + 2 \times (3\lambda) - 3\lambda = 0$ c'est-à-dire $-\lambda = 0$. On a donc $u = 0$. Cela montre que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ donc $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.

En conséquence $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

9. On a vu que (v_1) est une base de $\ker(f)$ et (v_2, v_3) une base de $\text{Im}(f)$. Comme $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 par la question précédente, la famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Comme $v_1 \in \ker(f)$ on a $f(v_1) = 0$ et $f(f(v_1)) = f(0) = 0$. On a $f(v_2) = f((0, 3, 2)) = (0, 3, 2) = v_2$ donc $f^2(v_2) = f(f(v_2)) = f(v_2)$. On a $f(v_3) = f((1, -1, 0)) = (1, -1, 0) = v_3$ donc $f^2(v_3) = f(f(v_3)) = f(v_3)$. Les applications linéaires f et f^2 coïncidant sur la base B on obtient que $f^2 = f$.

10. La question précédente montre que f est une racine carrée de f .

D'après la question 1, une racine carrée de f différente de f est $-f$.

Utilisons la base B pour déterminer une autre racine carrée de f . Posons g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 définie par $g(v_1) = 0$, $g(v_2) = v_3$ et $g(v_3) = v_2$. On peut vérifier que $\forall i, g^2(v_i) = f(v_i)$. Les applications linéaires f et g^2 coïncidant sur la base B on obtient que $g^2 = f$ donc g est une racine carrée de f différente de f .

C Racines carrées et dérivation

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $I = \text{id}_E$ et d l'endomorphisme de E défini par

$$d(P) = P'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $d + \lambda I$ admette une racine carrée.

11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Étant donné $m \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k.$$

(a) Soit $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes, avec $m = \max(\deg P, \deg Q)$, quitte à compléter avec des coefficients nuls. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^m (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$, donc

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q)(f) &= \sum_{k=0}^m (\lambda a_k + \mu b_k) f^k \text{ par définition} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^m a_k f^k + \mu \sum_{k=0}^m b_k f^k \text{ par opérations dans l'anneau } \mathcal{L}(E) \\ &= \boxed{\lambda P(f) + \mu Q(f)}. \end{aligned}$$

(b) Avec $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^q b_j X^j$,

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= \left(\sum_{k=0}^m a_k f^k \right) \circ \left(\sum_{j=0}^q b_j f^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^q a_k b_j f^{k+j} \\ &= \sum_{i=0}^{m+q} \left(\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) f^i \text{ en posant } i = k + j \\ &= \boxed{(PQ)(f)} \end{aligned}$$

en reconnaissant le produit de Cauchy de P et Q .

12. Étude de d .

(a) Soit $P \in E$.

$P \in \ker d \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. Donc $\boxed{\ker d = \mathbb{R}_0[X]}$.

$\ker d$ est de dimension 1, donc par le vénéré théorème du rang $\text{Im } d$ est de dimension $n - 1$.

Or $\forall P \in E, d(P) = P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a une inclusion et l'égalité des dimensions. Donc $\boxed{\text{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

(b) Soit $P \in E$. On a $d(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par récurrence (à détailler), $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[X]$. Donc $d^n(P) \in \mathbb{R}_0[X]$ puis $d^{n+1}(P) = 0_E$.

Ainsi $\boxed{d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

13. Condition nécessaire : on suppose que $d + \lambda I$ admet une racine carrée u .

(a) Alors $u^2 = d + \lambda I$. Donc $d = u^2 - \lambda I$.

Ainsi $d \circ u = (u^2 + \lambda I) \circ u = u^3 - u = u \circ (u^2 + \lambda I) = \boxed{u \circ d}$.

Remarque. Plus théoriquement, d'après la question précédente, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent pour tous polynômes P, Q .

On a $d(u(1)) = u(d(1)) = u(0_E) = 0_E$. Donc $u(1) \in \ker d$. Donc $u(1) \in \mathbb{R}_0[X]$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } u(1) = a}$.

Remarque. On identifie dans la suite un polynôme constant et le réel associé.

(b) D'une part, $u^2(1) = u(u(1)) = u(a) = au(1) = a^2$.

D'autre part, $u^2(1) = (d + \lambda I)(1) = d(1) + \lambda \cdot 1 = \lambda$.

Finalement $\boxed{\lambda \geq 0}$.

(c) Supposons $\lambda = 0$. Alors $u^2 = d$. Or $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ (le redémontrer).

Donc $\ker(u) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Or d n'est pas injectif donc u ne l'est pas non plus. Donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Par ailleurs $u^2(X) = u(u(X)) = d(X) = 1 \in \ker u$.

Donc $u(u^2(X)) = 0$, soit $u^3(X) = d(u(X)) = 0$, donc $u(X) \in \ker d = \mathbb{R}_0[X]$.

Finalement $u(X) \in \ker u$, donc $1 = d(X) = u(u(X)) = 0$. Absurde.

Ceci montre par l'absurde que $\boxed{\lambda > 0}$.

14. Réciproque : on suppose $\lambda > 0$.

(a) $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. D'après le théorème de Taylor-Young, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que au voisinage de 0,

$$\boxed{\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n)}.$$

(b) Écrivons l'égalité qui précède pour tout $x \in]-1, 1[$ par exemple. Il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$.

$$\text{En élevant au carré, } 1+x = P_n^2(x) + 2P_n(x)x^n\varepsilon(x) + x^{2n}\varepsilon(x)^2 = P_n^2(x) + x^n \underbrace{(2P_n(x)\varepsilon(x) + x^n\varepsilon(x)^2)}_{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0},$$

soit $P_n^2(x) = 1+x + o(x^n)$.

Posons $W = P_n^2 - (1+X)$. Comme $w(x) = o(x^n)$, W a 0 pour racine de multiplicité au moins $n+1$.

Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n^2 = (1+X) + X^{n+1}Q$.

Finalement, le reste attendu est $\boxed{R_n = X + 1}$.

(c) Avec $\boxed{g = P_n\left(\frac{1}{\lambda}d\right)}$, on a, d'après les règles de calcul de la question 11,

$$g^2 = P_n^2\left(\frac{1}{\lambda}d\right) = 1 + \frac{1}{\lambda}d + \left(\frac{1}{\lambda}d\right)^{n+1} Q\left(\frac{1}{\lambda}d\right).$$

Or $\left(\frac{1}{\lambda}d\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1} d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $\boxed{g^2 = I + \frac{1}{\lambda}d}$.

Avec, enfin, $\boxed{u = \sqrt{\lambda}g}$, possible car $\lambda > 0$, on a $u^2 = \lambda g^2 = \lambda \left(I + \frac{1}{\lambda}d\right) = \boxed{d + \lambda I}$.

FIN DE L'ÉPREUVE