

Sol C5. Groupe symétrique

Exercice C5.5

Montrer que S_n est engendré par

1. S_n est engendré par les transpositions.

Soit $i, j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$. La transposition $(ij) = (1i)(1j)(1i)$. Ceci montre que les transpositions de la forme $(1i)$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ engendrent les transpositions et donc S_n .

2. On va montrer par récurrence sur k que les transpositions de la forme $(i \ i+1)$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ engendrent toutes les transpositions de la forme $(1k)$ pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et se ramener à la question 1.

C'est immédiat pour $k = 2$. Pour l'hérédité, on écrit $(1k+1) = (kk+1)(1k)(kk+1)$.

3. Soit c le cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ et t la transposition (12) .

Montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n-2\}$ que

$$c^k \circ t \circ c^{-k} = (k+1 \ k+2).$$

On se ramène ainsi à la question 2.

Exercice C5.7

Soit $n \geq 2$. Les cycles du groupe alterné A_n sont les q -cycles avec q impair car leur signature est alors $(-1)^{q-1}$.

Montrons que A_n est engendré par les 3-cycles.

Soit $\sigma = \prod_{i=1}^r \tau_i$ une permutation de A_n , engendrée donc par un nombre pair de transpositions. On va montrer

que tout produit de deux transpositions peut s'écrire comme produit de 3-cycles. Ainsi il suffira de grouper deux par deux les transpositions du produit ci-dessus.

- Si elles sont à support disjoint, alors $(ab)(cd) = (acb)(acd)$.
- Sinon $(ab)(ac) = (bac)$.