DEVOIR MAISON N° 23

Problème 1

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On choisit une permutation σ uniformément au hasard dans S_n.

Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui compte le nombre de cycles de longueur k apparaissant dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

A Nombre moyen de cycles de longueur k

1. Soit $A \subset [\![1, n]\!]$ une partie de cardinal k. Déterminer le nombre de permutations de S_n pour lesquelles l'ensemble A constitue le support d'un cycle de longueur k présent dans la décomposition en produit de cycles.
2. Pour chaque partie A de cardinal k, on introduit la variable aléatoire

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ constitue un cycle de } \sigma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Déterminer la loi de I_A.
3. Exprimer X_k à l'aide des variables (I_A). et en déduire que

$$E(X_k) = \frac{1}{k}.$$

4. On note $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ le nombre total de cycles de σ. Déterminer $E(X)$ puis un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ quand $n \to +\infty$.

B Cycles longs

L'expérience aléatoire est toujours le tirage aléatoire uniforme d'une permutation $\sigma \in S_n$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit C_k l'événement « σ possède un cycle de longueur k » et L l'événement « σ possède un cycle long », c'est-à-dire un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$.

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $k > \frac{n}{2}$. Montrer que $P(C_k) = \frac{1}{k}$.
6. En déduire que $P(L)$ sous forme de somme puis $P(\overline{L})$ à l'aide d'une somme harmonique.

C Le problème des prisonniers

On dispose de 100 prisonniers et de 100 boîtes numérotées. Chaque boîte contient un numéro entre 1 et 100, chaque numéro apparaissant exactement une fois.

Les prisonniers entrent successivement dans la salle. Chacun peut ouvrir au plus 50 boîtes. Si tous les prisonniers retrouvent leur propre numéro, ils sont tous graciés ; sinon ils sont tous laissés en prison.

7. Sans consultation préalable, si chaque prisonnier ouvre indépendamment de ses congénères 50 boîtes au hasard, quelle est la probabilité qu'ils soient graciés ?
8. Les prisonniers ont la possibilité de se consulter avant le début de l'expérience et d'élaborer une stratégie commune (après le début de l'expérience, ils ne peuvent plus communiquer). À l'aide des parties précédentes, proposer une stratégie leur offrant une meilleure chance d'être graciés et donner une valeur approchée de la probabilité de succès.
9. Comportement asymptotique.

   On pose exactement le même problème avec n prisonniers et n boîtes, chaque prisonnier pouvant ouvrir exactement $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ boîtes. On note p_n la probabilité de succès de la stratégie.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=\lfloor n/2\rfloor+1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.