

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

### Problème 1

#### Notations

On considère un entier naturel  $n \geq 2$  et on note  $\mathcal{B} = (X^j)_{0 \leq j \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit un polynôme :

$$R_k = X^k(1 - X)^{n-k}$$

Tout polynôme  $P$  pourra être identifié à la fonction polynomiale qui lui est associée et on pourra noter  $0$  le polynôme nul, au lieu de  $0_{\mathbb{R}[X]}$ . On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ U &\longmapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U \binom{k}{n} R_k \end{aligned}$$

Dans tout le problème, le résultat d'une question peut être admis afin de faire la suite.

## A Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, on se place dans le cas où  $n = 3$ . Ainsi les polynômes définis dans l'énoncé sont

$$R_0 = (1 - X)^3, \quad R_1 = X(1 - X)^2, \quad R_2 = X^2(1 - X) \text{ et } R_3 = X^3$$

1. Montrer que  $(R_0, R_1, R_2, R_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
3. Justifier que la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
5. (a) Déterminer deux polynômes  $Q_2$  et  $Q_3$  de degrés respectifs 2 et 3 et **de coefficient dominant 1** tels que :

$$\varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2 \text{ et } \varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$$

On pose également  $Q_0 = 1$  et  $Q_1 = X$ .

- (b) On pose  $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ . Justifier que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- (c) Expliciter la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{C}$ , on note  $D$  cette matrice.
- (d) Déterminer la matrice de passage, notée  $P$ , de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Déterminer  $P^{-1}$ .
- (e) Pour  $p \in \mathbb{N}$ , déterminer  $A^p$ . On explicitera tous les coefficients.

## B Étude du commutant

On se place toujours dans le cas où  $n = 3$  et on reprend les notations de la partie précédente.

On note  $F_A$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire que  $AM = MA$ .

6. Montrer que  $F_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .
7. Soit  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et  $N = P^{-1}MP$ . Montrer que  $M$  commute avec  $A$  si et seulement si  $N$  commute avec  $D$ .
8. On note  $F_D = \{N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), DN = ND\}$ . On admet que l'on peut démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , comme dans la question 1. Déterminer une base et la dimension de  $F_D$ , pour cela on ne s'effrayera pas d'un système de 16 équations à 16 inconnues.
9. On pose :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

Démontrer que  $\Gamma$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

10. En déduire la dimension de  $F_A$ .

## C Retour au cas général

On rappelle que  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

11. (a) Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Démontrer que :

$$X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}$$

- (b) En déduire que  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (c) Démontrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

12. (a) Démontrer que :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = X \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X$$

- (b) En déduire que  $\mathbb{R}_2[X]$  est stable par  $\varphi$ .

On note  $\tilde{\varphi}$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  correspondant à la restriction de  $\varphi$  à  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- (c) On note  $A_n$  la matrice de  $\tilde{\varphi}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Démontrer que  $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H$  où  $H$  est une matrice à préciser.

- (d) Déterminer une matrice  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible et dont les coefficients diagonaux valent 1 telle que

$$H = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$ .

*Indication : pour étudier la limite d'une suite de matrices, on examine simplement la limite coefficient par coefficient.*

## Problème 2

### Dénombrement.

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n \geq 1$  éléments. On rappelle la définition d'une **partition** de  $E$  : un ensemble de parties de  $E$

- non vides et deux à deux disjointes,
- dont la réunion vaut  $E$ .

Par exemple les parties  $\{a, b, e\}$  et  $\{c, d\}$  forment une partition de l'ensemble  $\{a, b, c, d, e\}$ .

1. Soient  $c, d \in \mathbb{N}$  tels que  $n = c + d$ . Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en deux sous-ensembles, l'un ayant  $c$  éléments et l'autre  $d$  éléments.
2. Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en deux sous-ensembles non vides.
3. On suppose (dans cette question seulement) que  $n$  est pair. Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en sous-ensembles contenant chacun exactement deux éléments.
4. Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $n = ab$ . Déterminer le nombre de partitions de  $E$  en  $a$  sous-ensembles contenant chacun  $b$  éléments.

### Probabilités

On lance 100 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Pour tout  $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$ , on appelle  $X_N$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où, au cours des  $N$  premiers lancers, deux résultats consécutifs ont été différents. Par exemple, si les premiers lancers sont  $(F, F, P, F, P, P, P, F, \dots)$  alors  $X_8$  vaut 4 (*prenez la peine de vérifier que ça vous paraît clair avant d'attaquer le problème*).

5. Décrire l'univers  $\Omega$  associé à l'expérience aléatoire présentée ici : les 100 lancers consécutifs de notre pièce. Déterminer son cardinal.
6. Pour  $2 \leq N \leq 100$ , déterminer  $X_N(\Omega)$  l'ensemble des valeurs de  $X_N$ .
7. Déterminer la loi de  $X_2$  et son espérance.
8. Déterminer la loi de  $X_3$  et son espérance.
9. Pour  $2 \leq N \leq 100$ , déterminer  $\mathbb{P}(X_N = 0)$  et  $\mathbb{P}(X_N = 1)$ .
10. Soit  $2 \leq N \leq 99$ . On pose  $Y_N = X_{N+1} - X_N$ .
  - (a) Pour tout  $0 \leq k \leq N - 1$ , montrer que

$$\mathbb{P}((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k).$$

- (b) En déduire la loi de  $Y_N$  et son espérance.
- (c) Calculer  $E(X_N)$  en fonction de  $N$ .
- (d) Montrer que  $X_N$  et  $Y_N$  sont indépendantes.
- (e) Montrer que si la variable aléatoire  $U$  suit une loi binomiale de paramètres  $(N - 1, 1/2)$  et  $V$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ , alors  $U + V$  suit une loi binomiale de paramètres  $(N, 1/2)$ .
- (f) En déduire loi, espérance et variance de  $X_N$ .