

**Problème 1****A Étude du cas  $n = 3$** 

- Pour tout  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on a  $R_k = X^k(1 - X)^{3-k}$ , ainsi  $R_k \in \mathbb{R}_3[X]$  puisque  $\deg(R_k) = 3$ .  
• Montrons ensuite que la famille  $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$  est libre.

On se donne  $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq 3} \in \mathbb{R}^4$  tels que  $\sum_{k=0}^3 \lambda_k R_k = 0$ .

On évalue cette égalité en 0 pour obtenir  $\lambda_0 = 0$  puis on évalue en 1 pour obtenir  $\lambda_3 = 0$ .  
Il reste  $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0$ , c'est-à-dire

$$\lambda_1 X(1 - X)^2 + \lambda_2 X^2(1 - X) = 0.$$

En examinant le monôme de degré 1 dans cette égalité, on obtient  $\lambda_1 = 0$  puis on en déduit que  $\lambda_2 = 0$ .

- Finalement la famille  $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$  est libre et comme c'est une famille de cardinal  $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ , on en déduit que c'est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .  
2. • L'application  $\varphi$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_3[X]$  car pour tout  $U \in \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\varphi(U)$  est une combinaison linéaire des polynômes  $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$  qui forment une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .  
• Montrons ensuite la linéarité de  $\varphi$ . Soit  $(U, V) \in \mathbb{R}_3[X]^2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda U + \mu V) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (\lambda U + \mu V) \binom{k}{3} R_k \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left( \lambda U \binom{k}{3} + \mu V \binom{k}{3} \right) R_k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} U \binom{k}{3} R_k + \mu \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} V \binom{k}{3} R_k \\ &= \lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

3. On calcule les images par  $\varphi$  des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ . En utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= R_0 + 3R_1 + 3R_2 + R_3 = (1 - X)^3 + 3X(1 - X)^2 + 3X^2(1 - X) + X^3 = (X + (1 - X))^3 = 1, \\ \varphi(X) &= R_1 + 2R_2 + R_3 = X(1 - X)^2 + 2X^2(1 - X) + X^3 = X^3 - 2X^2 + X + 2X^2 - 2X^3 + X^3 = X, \\ \varphi(X^2) &= \frac{1}{3}R_1 + \frac{4}{3}R_2 + R_3 = \frac{1}{3}X(1 - X)^2 + \frac{4}{3}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X^2, \\ \varphi(X^3) &= \frac{1}{9}R_1 + \frac{8}{9}R_2 + R_3 = \frac{1}{9}X(1 - X)^2 + \frac{8}{9}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{9}X + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{9}X^3. \end{aligned}$$

En disposant les résultats trouvés en colonnes, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice  $A$  est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, on en déduit que  $A$  est inversible et donc que  $\varphi$  est bijective. Donc  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

5. (a) • On cherche un polynôme  $Q_2 = X^2 + aX + b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel  $\varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2$ . Matriciellement, cela se traduit par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} b & = \frac{2}{3}b \\ a + \frac{1}{3} & = \frac{2}{3}a \end{cases}$$

On obtient  $b = 0$  et  $a = -1$ , c'est-à-dire  $Q_2 = X^2 - X$ .

• On procède de même en cherchant  $Q_3$  sous la forme  $Q_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

On souhaite  $\varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$ , i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} c & = \frac{2}{9}c \\ b + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} & = \frac{2}{9}b \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} & = \frac{2}{9}a \end{cases}$$

On obtient  $c = 0$ ,  $b = \frac{1}{2}$  et  $a = -\frac{3}{2}$ , c'est-à-dire  $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ . Finalement,

$$Q_2 = X^2 - X \text{ et } Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

(b) La famille  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_3[X]$  car elle est composée de polynômes non nuls de degrés distincts. Son cardinal étant égal à la dimension de  $\mathbb{R}_3[X]$ , c'est une base.

Donc  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

(c) D'après les questions précédentes, on a

$$\varphi(Q_0) = Q_0, \varphi(Q_1) = Q_1, \varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2 \text{ et } \varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

**Remarque.** On vient de diagonaliser la matrice  $A$ , c'est-à-dire de trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonale.

(d) Pour former la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ , on place en colonnes les composantes des polynômes de la base  $\mathcal{C}$  décomposés dans la base  $\mathcal{B}$ . D'après les expressions de  $Q_2$  et  $Q_3$  obtenues à la question 5a,

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme toute matrice de passage,  $P$  est inversible et  $P^{-1}$  peut-être obtenue par exemple en résolvant un système.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = & y_2 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 & = & y_3 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 + y_3 + y_4 \\ x_3 & = & y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases}$$

On en déduit que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(e) D'après la formule de changement de base, on sait que :  $A = PDP^{-1}$ . On en déduit, grâce à la simplification  $P^{-1}P = I_4$  que

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = P D^p P^{-1}$$

Or la matrice  $D$  étant diagonale, ses puissances sont (éventuellement par récurrence)

$$\forall p \in \mathbb{N}, D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2/3)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2/9)^p \end{pmatrix}$$

Il reste à effectuer les deux multiplications, pour obtenir

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p & 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^p & \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^p \end{pmatrix}$$

## B Étude du commutant

6. •  $F_A \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .  
 • La matrice nulle de taille 4 commute avec  $A$ .  
 • Soit  $(M, M') \in F_A^2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$(\lambda M + \mu M')A = \lambda(MA) + \mu(M'A) = \lambda AM + \mu AM' = A(\lambda M + \mu M').$$

Ainsi  $\lambda M + \mu M' \in F_A$ . Finalement

$$F_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

7. D'après la partie A, on sait que  $A = PDP^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P \\ &\Leftrightarrow DN = ND. \end{aligned}$$

**$M$  commute avec  $A$  si et seulement si  $N$  commute avec  $D$**

8. On se donne une matrice

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On a

$$\begin{aligned}
N \in F_D &\Leftrightarrow ND = DN \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2c/3 & 2d/9 \\ e & f & 2g/3 & 2h/9 \\ i & j & 2k/3 & 2l/9 \\ m & n & 2o/3 & 2p/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2i/3 & 2j/3 & 2k/3 & 2l/3 \\ 2m/9 & 2n/9 & 2o/9 & 2p/9 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow c = d = g = h = i = j = l = m = n = o = 0 \\
&\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow N \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44}).
\end{aligned}$$

Donc  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$  est une base de  $F_D$  qui est de dimension 6.

9. • Montrons tout d'abord que  $\Gamma$  est linéaire. Soit  $(M, M') \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\Gamma(\lambda M + \mu M') = P^{-1}(\lambda M + \mu M')P = \lambda P^{-1}MP + \mu P^{-1}M'P = \lambda \Gamma(M) + \mu \Gamma(M').$$

• Montrons ensuite l'injectivité de  $\Gamma$ .

$$M \in \text{Ker}(\Gamma) \Leftrightarrow P^{-1}MP = 0 \Leftrightarrow M = P0P^{-1} = 0.$$

• Finalement,  $\Gamma$  est un endomorphisme injectif en dimension finie donc c'est une bijection.

Autrement dit,  $\Gamma$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

10. Montrons que  $\Gamma(F_A) = F_D$ . Ainsi les sous-espaces vectoriels  $F_A$  et  $F_D$  auront la même dimension puisqu'ils seront isomorphes.

Déjà, d'après la question 7, on sait que si  $M \in F_A$  alors  $\Gamma(M) \in F_D$ , ce qui montre que  $\Gamma(F_A) \subset F_D$ .

Réciproquement, soit  $N \in F_D$ . On a  $N = P^{-1}(PNP^{-1})P$  avec  $PNP^{-1} \in F_A$  en utilisant encore la question 7. Ainsi  $M = PNP^{-1}$  vérifie  $N = \Gamma(M)$  donc  $N \in \Gamma(F_A)$ , ce qui montre que  $F_D \subset \Gamma(F_A)$ .

On a bien  $\Gamma(F_A) = F_D$ , on en déduit que  $\dim(F_A) = 6$ .

## C Retour au cas général

11. (a) Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j} &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^{k+j} (1-X)^{n-k-j} \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^k (1-X)^{n-j-k} \\ &= X^j (X + (1-X))^{n-j} = X^j. \end{aligned}$$

Donc  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}$ .

(b) D'après la question précédente, on sait que la famille  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  engendre la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  ainsi  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

De plus, son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ , donc  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(c) En procédant de la même façon que dans la question 2 de la partie A, on montre que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Déterminons son noyau. Soit  $U \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$$\varphi(U) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U\left(\frac{k}{n}\right) R_k = 0.$$

Or d'après la question précédente,  $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_n[X]$  ainsi l'égalité précédente implique

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Ainsi le polynôme  $U$  possède au moins  $n+1$  racines. Mais il est de degré au plus  $n$ , donc  $U = 0$ . On a montré que  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ , donc  $\varphi$  est injective. Enfin,  $\varphi$  est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc  $\varphi$  est bijectif.

Finalement,  $\varphi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

12. (a) • Soit  $n \geq 2$ . D'après la formule du binôme,

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

• Puis

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\binom{n}{k} \frac{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

On reprend le calcul précédent, on utilise toujours la formule du binôme de Newton et on effectue lors du calcul le changement d'indice  $j = k - 1$ .

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= X(X + (1-X))^{n-1} = X.\end{aligned}$$

• Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi(X^2) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) X^k (1-X)^{n-k}.\end{aligned}$$

Comme  $n \geq 2$ ,

$$\binom{n}{k} k(k-1) = \frac{n!}{k!(n-k)!} k(k-1) = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(X^2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) X^k (1-X)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^{k-2} (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} X^j (1-X)^{n-2-j} + \frac{n}{n^2} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 (X + (1-X))^{n-2} + \frac{1}{n} X (X + (1-X))^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X.\end{aligned}$$

Finalement,  $\boxed{\varphi(1) = 1, \varphi(X) = X \text{ et } \varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X}$ .

(b) D'après la question précédente, l'image par  $\varphi$  de chaque vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  est un polynôme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Donc par linéarité de  $\varphi$ ,  $\mathbb{R}_2[X]$  est stable par  $\varphi$ .

(c) D'après les égalités trouvées dans la question 12a, en disposant en colonnes les images de 1,  $X$  et  $X^2$  par  $\tilde{\varphi}$ , on a

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient la décomposition souhaitée en posant  $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(d) Dans cette question, on reconnaît la formule de changement de base. Notons  $h$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  canoniquement associé à la matrice  $H$ . On a  $h(1) = 1$ ,  $h(X) = X$  et  $h(X^2) = X$ . Ainsi,  $h(X^2 - X) = 0$ .

La famille  $(1, X, X^2 - X)$  est libre (car échelonnée en degrés) et possède 3 vecteurs donc c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Dans cette base, on a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = X \quad \text{et} \quad h(X^2 - X) = 0$$

La matrice de l'endomorphisme  $h$  dans cette nouvelle base est

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose  $Q$  la matrice de passage de  $(1, X, X^2)$  vers  $(1, X, X^2 - X)$ , *i.e.*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est la matrice de passage de  $(1, X, X^2 - X)$  à  $(1, X, X^2)$ , ce qui donne

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque  $X^2 = (X^2 - X) + X$ . On a bien  $\Delta = Q^{-1}HQ$  et donc

$$H = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) On reprend la relation de la question 12c.

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)QI_3Q^{-1} + \frac{1}{n}Q\Delta Q^{-1} \\
 &= Q\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}\Delta\right)Q^{-1} \\
 &= Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix}Q^{-1}.
 \end{aligned}$$

On élève à la puissance  $n$  en constatant comme d'habitude la simplification des  $Q^{-1}$  et  $Q$  :

$$A_n^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

En effectuant les deux multiplications, on trouve :

$$A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - (1 - 1/n)^n \\ 0 & 1 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}.$$

Or

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

et

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1.$$

Par continuité de  $x \mapsto e^x$  en  $-1$ , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 & e^{-1} \end{pmatrix}}.$$

## Problème 2

### Dénombrement.

1. Si  $c = 0$  ou  $d = 0$ , il n'existe aucune partition de  $E$  en deux sous-ensembles non vides.

On suppose donc  $c, d \geq 1$ . Si  $c \neq d$ , il suffit de choisir la partie à  $c$  éléments, l'autre étant son complémentaire. Il y a donc  $\binom{n}{c}$  possibilités.

Si  $c = d$ , chaque partition est comptée deux fois par ce procédé, une fois par chacun des deux sous-ensembles. Il y a donc  $\frac{1}{2} \binom{n}{c}$  possibilités.

Ainsi, le nombre cherché est  $\binom{n}{c}$  si  $c \neq d$  et  $\frac{1}{2} \binom{n}{c}$  si  $c = d$ .

2. Pour former une partition de  $E$  en deux sous-ensembles non vides, on peut choisir une partie non vide et différente de  $E$ , puis prendre son complémentaire.

Il y a  $2^n - 2$  parties non vides et différentes de  $E$ , mais chaque partition est comptée deux fois. Le nombre cherché est donc  $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$ .

Ainsi,  $2^{n-1} - 1$ .

3. On suppose  $n$  pair. On commence par ordonner les éléments de  $E$ , ce qui donne  $n!$  listes possibles, puis on regroupe les éléments deux par deux.

Chaque paire peut être ordonnée de 2 façons, et les  $n/2$  paires peuvent être permutées entre elles de  $(n/2)!$  façons. Chaque partition est donc comptée  $2^{n/2}(n/2)!$  fois.

Le nombre cherché est donc  $\frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!}$ .

4. On procède de même. On ordonne les  $n$  éléments de  $E$ , puis on les regroupe en  $a$  blocs de taille  $b$ .

Dans chaque bloc, les  $b$  éléments peuvent être permutés de  $b!$  façons, et les  $a$  blocs peuvent être permutés entre eux de  $a!$  façons.

Le nombre cherché est donc  $\frac{n!}{(b!)^a a!}$ .

### Probabilités

5. L'univers est l'ensemble des suites de longueur 100 formées avec les deux symboles  $F$  et  $P$ .

Ainsi,  $\Omega = \{F, P\}^{100}$  et  $|\Omega| = 2^{100}$ .

6. Au cours des  $N$  premiers lancers, il y a  $N - 1$  comparaisons entre deux lancers consécutifs. Le nombre de changements peut donc être compris entre 0 et  $N - 1$ .

Toutes ces valeurs sont possibles : par exemple, une suite constante donne 0 changement, et une suite alternée donne  $N - 1$  changements.

Ainsi,  $X_N(\Omega) = \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ .

7. Pour  $N = 2$ , on a  $X_2 = 0$  si les deux lancers sont identiques et  $X_2 = 1$  s'ils sont différents.

Comme la pièce est équilibrée,  $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$  et  $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $E(X_2) = \frac{1}{2}$ .

8. Pour  $N = 3$ , on regarde les deux transitions. Les suites  $FFF$  et  $PPP$  donnent  $X_3 = 0$ , les suites  $FPP$ ,  $FPP$ ,  $PF F$  et  $PPF$  donnent  $X_3 = 1$ , et les suites  $FPP$  et  $PPF$  donnent  $X_3 = 2$ .

Donc  $P(X_3 = 0) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $P(X_3 = 2) = \frac{1}{4}$ .

Ainsi,  $X_3 \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$  et  $E(X_3) = 1$ .

9. L'événement  $(X_N = 0)$  correspond aux suites constantes : il y en a 2, donc  $P(X_N = 0) = \frac{2}{2^N} = 2^{1-N}$ .

L'événement  $(X_N = 1)$  correspond aux suites ayant un unique changement. On choisit le résultat du premier lancer de 2 façons, puis la position de l'unique changement parmi les  $N - 1$  transitions. Il y a donc  $2(N - 1)$  suites favorables.

Ainsi,  $P(X_N = 0) = 2^{1-N}$  et  $P(X_N = 1) = (N - 1)2^{1-N}$ .

10. Soit  $2 \leq N \leq 99$ . On pose  $Y_N = X_{N+1} - X_N$ .

- (a) La variable  $Y_N$  vaut 0 si le lancer numéro  $N + 1$  est identique au lancer numéro  $N$ , et vaut 1 sinon.

Fixons  $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ . Une fois les  $N$  premiers lancers connus, la probabilité que le lancer suivant soit identique au  $N$ -ième est  $\frac{1}{2}$ .

Donc  $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$ .

Ainsi,

$$P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

- (b) En sommant la relation précédente pour  $k$  allant de 0 à  $N - 1$ , on obtient  $P(Y_N = 0) = \frac{1}{2}$ .

Comme  $Y_N$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a aussi  $P(Y_N = 1) = \frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $Y_N \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $E(Y_N) = \frac{1}{2}$ .

- (c) Comme  $X_{N+1} = X_N + Y_N$ , on obtient  $E(X_{N+1}) = E(X_N) + E(Y_N) = E(X_N) + \frac{1}{2}$ .

Or  $E(X_2) = \frac{1}{2}$ . Par récurrence, pour tout  $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$ , on a  $E(X_N) = \frac{N - 1}{2}$ .

Ainsi,  $E(X_N) = \frac{N - 1}{2}$ .

- (d) D'après la question précédente, pour tout  $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ , on a  $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$ .

Comme  $P(Y_N = 0) = \frac{1}{2}$ , cela donne  $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = P(Y_N = 0)P(X_N = k)$ .

De plus,

$$P((Y_N = 1) \cap (X_N = k)) = P(X_N = k) - P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

Comme  $P(Y_N = 1) = \frac{1}{2}$ , on a aussi  $P((Y_N = 1) \cap (X_N = k)) = P(Y_N = 1)P(X_N = k)$ .

Ainsi,  $X_N$  et  $Y_N$  sont indépendantes.

(e) Soient  $U \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$  et  $V \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$  indépendantes.

Pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on a

$$P(U + V = k) = P(U = k, V = 0) + P(U = k - 1, V = 1).$$

Avec la convention  $P(U = -1) = P(U = N) = 0$ , cela donne

$$P(U + V = k) = \frac{1}{2}P(U = k) + \frac{1}{2}P(U = k - 1).$$

Donc

$$P(U + V = k) = \frac{1}{2} \binom{N-1}{k} \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2} \binom{N-1}{k-1} \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Par la formule de Pascal,  $\binom{N-1}{k} + \binom{N-1}{k-1} = \binom{N}{k}$ . Ainsi,  $P(U + V = k) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$ .

Donc  $U + V \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$ .

(f) On montre par récurrence que  $X_N \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$ .

La propriété est vraie pour  $N = 2$  d'après la question 7. Supposons  $X_N \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$ . D'après les questions précédentes,  $Y_N \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$  et  $X_N$  et  $Y_N$  sont indépendantes. Comme  $X_{N+1} = X_N + Y_N$ , la question précédente donne  $X_{N+1} \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ .

Ainsi, pour tout  $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$ ,  $X_N \sim \mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$ .

On en déduit immédiatement  $E(X_N) = \frac{N-1}{2}$  et  $V(X_N) = \frac{N-1}{4}$ .