

**Problème 1****A Nombre moyen de cycles de longueur  $k$** 

1. Une telle permutation  $\sigma$  s'écrit  $\gamma \circ \sigma'$  avec  $\gamma$  un cycle de support  $A$  et  $\sigma'$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  (qui n'est autre que la permutation induite par  $\sigma$ ).

- Il y a  $(k-1)!$  cycles de support  $A$ . En effet, écrire un cycle revient à ordonner les éléments de  $A$  ( $k!$  possibilités), chaque cycle ayant  $k$  écritures différentes possibles. Le principe des bergers donne alors  $\frac{k!}{k} = (k-1)!$  cycles.

Autrement dit, déterminer un cycle revient à choisir le premier élément écrit puis une permutation des  $(k-1)$  autres éléments de  $A$ .

- Puis les  $n-k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$  peuvent être permutés arbitrairement, soit  $(n-k)!$  possibilités.

Ainsi, le nombre de permutations recherché est  $\boxed{(k-1)!(n-k)!}$ .

2. La variable  $I_A$  suit une loi de Bernoulli. Le tirage est équiprobable et  $|S_n| = n!$  donc

$$P(I_A = 1) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Ainsi,  $\boxed{I_A \sim \mathcal{B}\left(\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\right)}$ .

3. En notant  $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$  l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $k$ , on a  $X_k = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} I_A$ . Par linéarité de l'espérance,

$$E(X_k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} E(I_A) = \binom{n}{k} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k}.$$

Ainsi,  $\boxed{E(X_k) = \frac{1}{k}}$ .

4. Par linéarité de l'espérance,  $E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ .

Ainsi,  $\boxed{E(X) \sim \ln n}$  (équivalent du reste de la série harmonique divergente).

**B Cycles longs**

5. Soit  $k > \frac{n}{2}$ .

Une permutation ne peut posséder qu'un seul cycle de longueur  $k$ , donc  $X_k = \mathbf{1}_{C_k}$ . Autrement dit,  $C_k = (X_k \geq 1) = (X_k = 1)$ .

Par conséquent,  $P(C_k) = E(X_k) = \boxed{\frac{1}{k}}$ .

6. Pour  $k > \frac{n}{2}$ , les événements  $C_k$  sont deux à deux incompatibles. En effet, deux cycles de longueur strictement supérieure à  $n/2$  utiliseraient strictement plus de  $n$  éléments.

Ainsi,  $L = \bigcup_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n C_k$  est une union disjointe, donc

$$P(L) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n P(C_k) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc  $P(\bar{L}) = 1 - \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}$ .

Avec la notation  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (somme harmonique),  $P(\bar{L}) = 1 - (H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor})$ .

Finalement,

$$\boxed{P(L) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(\bar{L}) = 1 - (H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor})}.$$

## C Le problème des prisonniers

7. Soit  $G$  l'événement « ils sont tous graciés ». Un prisonnier donné trouve son numéro avec probabilité  $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ .

Les choix étant indépendants,  $P(\text{grâce}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ .

Ainsi,  $\boxed{P(G) = 2^{-100} \approx 7,89 \times 10^{-31}}$ .

8. Les prisonniers adoptent la stratégie suivante : les prisonniers s'attribuent tous un numéro différent de 1 à 100 (par exemple l'ordre dans lequel ils vont aller ouvrir les boîtes). Le prisonnier  $i$  ouvre d'abord la boîte  $i$ . S'il y trouve le numéro  $j$ , il ouvre ensuite la boîte  $j$ , puis continue ainsi jusqu'à retrouver son propre numéro ou avoir ouvert 50 boîtes.

Le contenu des boîtes définit une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, 100 \rrbracket$ .

Chaque prisonnier parcourt alors le cycle de  $\sigma$  qui contient son numéro (l'orbite de son numéro).

Tous les prisonniers réussissent si et seulement si tous les cycles de  $\sigma$  sont de longueur inférieure ou égale à 50, c'est-à-dire si et seulement si l'événement  $\bar{L}$  est réalisé.

D'après la question précédente,  $\boxed{P(G) = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}}$ .

Numériquement,  $\sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0,688172$ , donc  $P(G) \approx 0,311828$ , soit une spectaculaire probabilité de succès de plus de 31% !

9. **Comportement asymptotique.**

(a) On écrit

$$\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k/n}.$$

Cette somme est une somme de Riemann associée à la fonction  $t \mapsto 1/t$  sur  $[1/2, 1]$ .

Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k} = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t} = \boxed{\ln 2}$ .

(b) On a  $p_n = 1 - \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}$ .

En passant à la limite,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - \ln 2 \approx 0,30685}$ .